Journal für Mathematik-Didaktik
https://doi.org/10.1007/s13138-024-00233-9

ORIGINAL ARTICLE

# Kognitives Potenzial deutscher Abituraufgaben

## Eine Analyse zentraler Abituraufgaben im Sachgebiet Analysis

**Lena Frenken · Marcel Klinger · Gilbert Greefrath · Bärbel Barzel**

Eingegangen: 6. November 2022 / Angenommen: 3. Mai 2024


**Zusammenfassung** Die Frage nach den Anforderungen in Abiturprüfungen in Mathematik wird immer wieder kontrovers diskutiert. Dabei stehen oft konkrete Aufgabenstellungen im Fokus. Mit der hier vorgelegten Studie möchten wir einen Beitrag leisten, diese Diskussion durch eine systematische Analyse von Abituraufgaben zu fundieren. Leitend ist dabei die Frage nach dem kognitiven Potenzial der Aufgaben mit Blick auf die allgemeinen mathematischen Kompetenzen, die tangierten Grundvorstellungen und die verwendeten technischen Hilfsmittel.

Betrachtet wurden vierzehn Abituraufgaben mit 203 bewerteten Arbeitsaufträgen aus dem Aufgabenpool des Instituts für Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (IQB), in dem exemplarische Abituraufgaben im Rahmen des Zentralabiturs als Orientierung öffentlich zur Verfügung stehen. Konkret wurden Analysis-Aufgaben aus den Jahren 2020 und 2021 in die Studie einbezogen. Für die Analyse wurde ein Kodiermanual auf der Grundlage des COACTIV-Manuals entwickelt und um Analysekriterien mit Blick auf die Mediennutzung ergänzt, das auch zukünftig als

✉ Lena Frenken · Gilbert Greefrath
Institut für Didaktik der Mathematik und der Informatik, Universität Münster,
Henriette-Son-Straße 19, 48149 Münster, Deutschland
E-Mail: l.frenken@uni-muenster.de

Gilbert Greefrath
E-Mail: greefrath@uni-muenster.de

Marcel Klinger · Bärbel Barzel
Fakultät für Mathematik, Universität Duisburg-Essen, Thea-Leymann-Straße 9, 45127 Essen,
Deutschland

Marcel Klinger
E-Mail: marcel.klinger@uni-due.de

Bärbel Barzel
E-Mail: baerbel.barzel@uni-due.de

Published online: 07 June 2024

Instrument für Prozesse der Aufgaben- und Qualitätsentwicklung in der Sekundarstufe II genutzt werden kann.

Als Ergebnis der Studie lässt sich ein generell niedriges Niveau hinsichtlich des kognitiven Potenzials in allen untersuchten allgemeinen mathematischen Kompetenzen wie dem Argumentieren, Problemlösen, Modellieren oder Kommunizieren (als Verfassen von Text) konstatieren. Auch Grundvorstellungen werden nur wenig durch die Aufgabenstellungen angesprochen. Es bestehen kaum Unterschiede zwischen den Aufgaben mit unterschiedlichen Hilfsmitteln (Computeralgebra (CAS) und wissenschaftlicher Taschenrechner), wobei gerade die Potenziale von CAS nur wenig ausgenutzt werden. Diese Ergebnisse werden diskutiert und in Hinblick auf eine Weiterentwicklung von Abituraufgaben eingeordnet.

**Schlüsselwörter** Abituraufgaben · Kognitive Aktivierung · Digitale Werkzeuge

## Cognitive Potential of German Abitur Tasks

An Analysis of Central Tasks in the Field of Analysis

**Abstract** The question of the requirements in Abitur examinations in mathematics is often discussed controversially. The focus is often on concrete tasks. With the study presented here, we would like to contribute to substantiating this discussion through a systematic analysis of Abitur tasks. The guiding question is the cognitive potential of the tasks with regard to the general mathematical competences, the basic ideas involved, and the digital tools used.

Fourteen Abitur tasks with 203 work assignments were considered from the task pool of the Institute for Educational Quality Improvement (IQB), in which exemplary Abitur tasks are publicly available as orientation within the framework of the Central Abitur. Specifically, tasks in the domain of calculus from the years 2020 and 2021 were included in the study. A coding manual based on the COACTIV manual was developed for the analysis and supplemented with criteria regarding the use of digital media. The coding manual can also be used in the future as an instrument for task and quality development processes in upper secondary education.

As a result of the study, there was a generally low level of cognitive potential in all general mathematical competencies examined, e.g. in argumentation, problem solving, modelling, and communication (i.e., text writing). Moreover, the tasks addressed "Grundvorstellungen" only to a very limited extent. There were hardly any differences between the tasks with different digital tools (computer algebra (CAS) and scientific calculator), which means that the potentials of CAS were rarely used. These results are discussed and classified regarding the further development of Abitur tasks.

**Keywords** Abitur tasks · Cognitive activation · Digital tools

## 1 Einleitung

Zentrale Prüfungen wie das Abitur haben Einfluss auf den Mathematikunterricht. Dies geschieht entweder durch den direkten Backwash-Effekt, wenn Lehrkräfte sich bei der Aufgabengestaltung für das Lernen in Unterricht an den zentralen Prüfungsaufgaben orientieren (Prodromou 1995; Sabio et al. 2015) oder es findet eine Unterrichtsentwicklung auf Basis der Ergebnisse der zentralen Prüfungen statt (Racherbäumer und Kühn 2013). Auf Grund dieser beiden Einflussmöglichkeiten auf den Mathematikunterricht wird mehr Forschung zu den zentralen Prüfungen gefordert (Kahnert 2014).

Bisherige Studien zur Abiturprüfung beschäftigen sich mit der formalen Ausgestaltung der Abiturprüfungen, der Leistungsbeurteilung im Rahmen der Abiturprüfung und der thematischen Auswahl innerhalb der eingesetzten Aufgaben (Bruder 2021; Holmeier 2013; Kahnert 2014; Kühnel 2015). Darüber hinaus gibt es einige empirische Befunde zur Einschätzung des Schwierigkeitsgrads von Abituraufgaben (Hofbauer 2021; Lorenz et al. 2014; Vohns et al. 2019), die auf Aufgabenbearbeitungen und Lösungsquoten basieren. Lorenz et al. (2014) sehen hier weitere Forschung als notwendig an, konkret durch vertiefte Analysen präzisere Rückschlüsse geben zu können auf die Verteilung mathematischer Fähigkeiten, die durch die Aufgaben erfasst werden. Auch Kunter und Voss (2011) betonen, dass neben der Aufgabenschwierigkeit als empirisches Maß bei der Analyse von Aufgabenbearbeitungen andere relevante Kriterien wie der Anteil von technischen Aufgaben oder Argumentationen bedeutsam einzubeziehen sind, da diese durch den Backwash-Effekt ebenfalls konstruktiv Einfluss auf den Mathematikunterricht nehmen können (Prodromou 1995; Sabio et al. 2015). Das Ausschärfen der in den Aufgaben geforderten Kompetenzen in den Prüfungsaufgaben stellt eine wichtige Orientierung für eine bestmögliche Unterrichtsgestaltung mit Blick auf Abschlussprüfungen im Sinne des Constructive Alignments (Biggs 1996) dar. Hiernach sollen die in den Aufgaben geforderten Denkhandlungen in Lern- und Leistungssituationen eine möglichst große Passung zueinander aufweisen. Dies gilt auch für kognitive Aktivierung als wichtiges Kriterium für Unterrichtsqualität, die sich als kognitives Potenzial in den Leistungsaufgaben widerspiegeln sollte.

Das Ziel dieses Beitrags ist eine exemplarische, detaillierte Analyse bestehender zentraler Prüfungsaufgaben im Hinblick auf das kognitive Potenzial von Abituraufgaben, um den Forschungsstand zu den Anforderungen im Abitur zu erweitern. Dabei wird das Hauptaugenmerk auf die Frage gelegt, welche kognitiven Prozesse zur Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten durch die Aufgaben gefordert sind. Damit rekurrieren wir auf kognitive Aktivierung als diejenige Basisdimension eines wirksamen Lernprozesses (Klieme 2018; Reusser et al. 2021), die im Kern des Faches liegt (Lipowsky et al. 2018). Kognitive Aktivierung wird zum einen realisiert durch ein angemessenes kognitives Potenzial von Aufgaben, d.h. dass Denkhandlungen auch auf höherer Stufe gefordert sind (Anderson und Krathwohl 2001), und zum anderen durch gute Interaktionen im Lernprozess, die die kognitive Aktivierung erhalten (Fauth und Leuders 2022; Leuders und Holzäpfel 2011).

Das Kriterium des kognitiven Potenzials von Abituraufgaben kann zum einen die Beschreibung der Qualität von Prüfungsaufgaben konkretisieren und zum anderen als Instrument zur Bewertung von Abituraufgaben dienen.

Eine solche Analyse der in den Prüfungsaufgaben abgebildeten Anforderungen ist auch vor dem Hintergrund interessant, dass es aktuell intensive Austauschprozesse zu den konkreten Anforderungen für gute Prüfungsaufgaben der Abituraufgabenpools u. a. im Fach Mathematik gibt (Hoffmann et al. 2022) und diese so weiter objektiviert werden können.

Wir folgen dazu Vorarbeiten zur Beurteilung von Test- und Prüfungsaufgaben im Hinblick auf die Bewertung der kognitiven Aktivierung von Aufgaben (Drüke-Noe 2014; Jordan et al. 2008; Maier et al. 2010; Scheja 2017), die auf dem COACTIV-Framework aufbauen. Hier wird ein besonderer Fokus auf allgemeine Kompetenzen und Grundvorstellungen gelegt (Jordan et al. 2006). Daneben kommen in dieser Untersuchung auch weitere Kriterien zum Tragen, wie etwa in einer Studie zur Bewertung der Prüfungsanforderungen zum Erwerb des Mittleren Schulabschlusses im Fach Mathematik (Kühn und Drüke-Noe 2013), bei der die drei Dimensionen der Bildungsstandards (Leitideen, Kompetenzen, Anforderungsbereiche) für die Analyse genutzt wurden. Der Untersuchung prozessbezogener Kompetenzen in Prüfungsaufgaben kommt eine besondere Bedeutung zu, da auf Basis einer solchen Einstufung der Aufgaben – mit einem passenden Schema – eine hohe Vorhersagekraft für die Schwierigkeit von Aufgaben erreicht wird (Turner et al. 2013), auch wenn das kognitive Potenzial nicht das einzige schwierigkeitsgenerierende Merkmal einer Prüfungsaufgabe ist. In diesem Beitrag wird das COACTIV-Framework weiterentwickelt für Aufgaben aus der Sekundarstufe II und um Kategorien zum Einsatz digitaler Medien ergänzt.

Im Folgenden präsentieren wir zunächst die theoretische Fundierung und leiten auf deren Basis die Forschungsfragen her. Anschließend stellen wir die darauf aufbauende Methodik vor, um die Ergebnisse zunächst aus deskriptiver und dann aus interpretierender Sicht aufzuzeigen und zuletzt die Folgen zu diskutieren.

## 2 Theoretischer Hintergrund

Mit dem Fokus auf das kognitive Potenzial von Abituraufgaben in Deutschland führen wir zunächst wichtige Aspekte zu Abituraufgaben in Deutschland aus. Dazu zählen das theoretische Rahmenmodell der Bildungsstandards sowie empirische Ergebnisse zum Schwierigkeitsgrad und zur Aufgabenqualität. Anschließend nehmen wir die kognitive Aktivierung durch Aufgaben in den Blick und bereiten so theoretisch ein Schema zur Analyse des kognitiven Potenzials von Abituraufgaben vor.

Dabei beziehen wir den Aspekt der digitalen Werkzeuge in der Abiturprüfung ein, da diese dort durch eine Unterteilung in zwei Prüfungsmodi eine besondere Rolle spielen.

### 2.1 Abituraufgaben in Deutschland

Das deutsche Zentralabitur wurde im Jahr 2009 im internationalen Vergleich als eher gering bis mittel standardisiert beschrieben (Klein et al. 2009). Organisatorische Aspekte, die hierzu beitragen, sind etwa die dezentrale Korrektur und die zu hohe Offenheit der Korrekturkriterien (Holmeier 2013, S. 375). Die Aktualität der beiden Aspekte ist nach wie vor gegeben, denn zum einen wird das Abitur weiterhin dezentral korrigiert und zum anderen enthält der Aufgabenpool lediglich Lösungshinweise auf Basis einer exemplarischen Lösung, sodass bei der Korrektur Freiheiten bestehen. So bleibt die Heterogenität der Prüfungsanforderungen und der Bewertung bestehen trotz der Vorgabe einheitlicher Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung durch die Kultusministerkonferenz (KMK), zumal länderspezifische Ausgestaltungsmöglichkeiten bestehen bleiben (Kühn 2010, S. 75 ff.).

Seit 2006 wird von der KMK eine Gesamtstrategie zum Bildungsmonitoring in Deutschland verfolgt (KMK 2016). Sie zielt darauf ab, die Kompetenzorientierung im Bildungssystem zu stärken. Im Rahmen dieser Gesamtstrategie wird seit 2017 ein Pool mit Prüfungsaufgaben für die Abiturprüfung bereitgestellt, aus dem alle Bundesländer Prüfungsaufgaben für das Abitur entnehmen können. Die Aufgaben werden auf der Grundlage der Bildungsstandards im Fach Mathematik für die allgemeine Hochschulreife entwickelt. Inhaltlich werden im Fach Mathematik die Sachgebiete Analysis, Lineare Algebra und Analytische Geometrie sowie Stochastik abgedeckt, von denen Analysis in jedem Durchgang den größten Anteil einer Abiturprüfung ausmacht (Heintz et al. 2015). Neben diesen inhaltsbezogenen Kompetenzen in den verschiedenen Leitideen sollen die Prüfungsanforderungen formale und anwendungsbezogene Aufgaben in einem ausgewogenen Verhältnis enthalten und allgemeine mathematische Kompetenzen berücksichtigen (KMK 2012, S. 24).

Zur Einordnung der Anforderungen bezüglich der erforderlichen Kompetenzen von Abituraufgaben eignet sich das Kompetenzmodell der Bildungsstandards, da es an dem für PISA Mathematik entwickelten Modell orientiert und für den Mathematikunterricht sowie die Abiturprüfungen maßgebend ist (Blum et al. 2004a; OECD 2003). Die Bildungsstandards ermöglichen eine Graduierung mathematischer Kompetenz durch die Anforderungsbereiche und spannen die folgenden drei Dimensionen auf (Blum et al. 2005; KMK 2012, 2022):

- Mathematische prozessbezogene Kompetenzen: mathematisch argumentieren, Probleme mathematisch lösen, mathematisch modellieren, mathematische Darstellungen verwenden, mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen, mathematisch kommunizieren (vgl. auch Niss 2003; Niss und Højgaard 2019)
- Mathematische inhaltsbezogene Kompetenzen (Leitideen): Zahl, Messen, Raum und Form, funktionaler Zusammenhang, Daten und Zufall
- Anforderungsbereiche: I Reproduzieren, II Zusammenhänge herstellen, III Verallgemeinern und Reflektieren (vgl. auch die Kompetenzstufung im COACTIV-Projekt Jordan et al. 2006; bzw. Turner et al. 2013).

Dabei besteht zum einen die Möglichkeit, dass eine Aufgabe innerhalb einer Dimension mehrere Kompetenzen erfordert. Zum anderen ist denkbar, jegliche Kombinationen der verschiedenen Dimensionen innerhalb einer Aufgabe zu realisieren.

### 2.2 Kognitives Potenzial in Prüfungsaufgaben

Ein wichtiges Kriterium für Unterrichtsqualität ist die kognitive Aktivierung der Lernenden (Blum et al. 2005; Klieme 2018). Eine solche kognitive Aktivierung wird im Mathematikunterricht häufig durch den Einsatz von Lernaufgaben mit passendem kognitiven Potenzial angeregt (Jordan et al. 2006; Neubrand et al. 2013) und sollte sich im Sinne des *constructive alignment* (Biggs 1996) in den Leistungsaufgaben widerspiegeln (Barzel und Leuders 2021). So kann eingefordert werden, dass sich Lernaufgaben im Unterricht und Leistungsaufgaben in Prüfungen nicht bezüglich ihrer Merkmale und Kategorien des kognitiven Anspruchs unterscheiden sollten (Drüke-Noe 2014). Bei der Gestaltung und Auswahl von Prüfungsaufgaben wird darüber hinaus als zentral angesehen, dass sie verschiedenartige Denkprozesse anstoßen und demnach das kognitive Potenzial auf verschiedenen Ebenen sowie in differenten Ausprägungen angesiedelt ist (Sjuts 2007).

Im Rahmen des COACTIV-Projekts wird ein Klassifikationsschema entwickelt, um „das Potential von Aufgaben zur kognitiven Aktivierung von Schülern“ (Jordan et al. 2008, S. 87) einordnen zu können. Dabei werden unter anderem die Kategorien *Mathematisches Stoffgebiet, Curriculare Wissensstufe, Außer- und Innermathematisches Modellieren, Umgehen mit mathematikhaltigen Texten, Mathematisches Argumentieren, Umgehen mit mathematischen Darstellungen, und Grundvorstellungen* verwendet (Jordan et al. 2008). So wird die im COACTIV-Projekt zentrale Dimension der kognitiven Aktivierung in Bezug auf Aufgaben als das von dem bearbeitenden Individuum geforderte Niveau in den verschiedenen Kategorien aufgefasst (Kunter und Voss 2011) und lässt sich analog durch die einzelnen „Facetten kognitiver Prozesse beim Lösen der Aufgaben“ (Scheja 2017, S. 304) beschreiben. Das Schema zeigt insbesondere in den Dimensionen des *inhaltlichen Rahmens* und der *kognitiven Elemente des Modellierungskreislaufs* Parallelen zum Kompetenzraster der Bildungsstandards im Bereich der prozessbezogenen Kompetenzen (Jordan et al. 2006, 2008; KMK 2012). Bei einem Vergleich der Kategorien aus dem COACTIV-Projekt mit denen aus den Studien von Drüke-Noe (2014) und Scheja (2017) lassen sich für *Außer- und Innermathematisches Modellieren, Umgehen mit mathematikhaltigen Texten, Mathematisches Argumentieren und Umgehen mit mathematischen Darstellungen* jeweils Parallelen zu den prozessbezogenen Kompetenzen aus den Bildungsstandards (Mathematisch argumentieren, Probleme mathematisch lösen, Mathemaisch modellieren, Mathematische Darstellungen verwenden, Mathematisch kommunizieren) (KMK 2012) herstellen. Lediglich das technische Arbeiten wird nicht in den Blick genommen. Daher hat Drüke-Noe (2014) für die Analyse von Klassenarbeiten die Kategorien aus dem COACTIV-Projekt um das technische Arbeiten ergänzt. Diese Ergänzung ist auch von Scheja (2017) für die Analyse von Abschlussprüfungen und von Turner et al. (2013) für die Untersuchung des Schwierigkeitsgrades von PISA-Aufgaben verwendet worden. Nach dieser Ergänzung sind durch die Kategorien die allgemeinen mathematischen Kompetenzen aus den Bildungsstandards abgedeckt.

Zusätzlich zu den in den Bildungsstandards berücksichtigten Kategorien werden insbesondere Grundvorstellungen im Rahmen des COACTIV-Projekts herausgestellt, die „Beziehung[en] zwischen dem mathematischen Inhalt, der Realität und den individuellen mentalen Strukturen" (Jordan et al. 2008, S. 89) beschreiben. Grundvorstellungen geben den fachlichen Aspekten eines mathematischen Konzepts Bedeutung und werden als eine entscheidende Voraussetzung für die sinnvolle Arbeit mit einem mathematischen Konzept betrachtet (Greefrath et al. 2016). Sie werden darüber hinaus als wesentliche Voraussetzung für die Entwicklung allgemeiner mathematischer Kompetenzen angesehen (Blum et al. 2004b) und können als normative Leitlinien mit Hilfe einer sachanalytisch begründeten Klassenbildung hergeleitet werden (Salle und Clüver 2021). Blum et al. (2004b) unterscheiden elementare Vorstellungen als Grundlage verständigen mathematischen Arbeitens (z. B. bei arithmetischen Grundoperationen) und erweiterte Grundvorstellungen, die entweder bereits von realen Handlungen abgelöst sind oder die nicht-triviale Kombination elementarer Vorstellungen zu einer neuen Begrifflichkeit darstellen (z. B. bei Funktionen). Die Kombination dieser erweiterten Grundvorstellungen zu Begriffen höherer Ordnung wird als komplex bezeichnet (z. B. beim Ableitungsbegriff). Ausprägungen zu verschiedenen Grundvorstellungen werden bereits im COACTIV-Projekt verwendet (Jordan et al. 2008, S. 91). Eine Übersicht über wichtige Grundvorstellungen zu zentralen Begriffen aus dem Sachgebiet Analysis, wie Ableitung und Integral, geben Greefrath et al. (2016).

Im Rahmen dieses Beitrags soll eine Fokussierung auf Abituraufgaben im Fach Mathematik erfolgen, weshalb etwa ein allgemeindidaktisches Kategoriensystem mit Kategorien wie Wissensarten, Wissenseinheiten und Offenheit (vgl. Maier et al. 2010) nicht spezifisch genug erscheint. Dennoch sind auch in diesem Kategorienschema Aspekte der Dimensionen in den Bildungsstandards sowie der Kategorien aus dem COACTIV-Projekt zu erkennen. In der hier vorgestellten Studie wird ein Schema zur Analyse des kognitiven Potenzials von Aufgaben für Abituraufgaben weiterentwickelt, welches auf den für die Sekundarstufe I entwickelten Kategorien aus dem COACTIV-Projekt (Jordan et al. 2006) mit den genannten Ergänzungen (Drüke-Noe 2014; Scheja 2017) basiert und durch Kategorien zur Rolle der Medien erweitert wird. Verschiedene Kategorien sind dabei notwendig, da die Unterteilung der Abituraufgaben durch das erlaubte technische Hilfsmittel in die beiden Gruppen *Computeralgebrasystem* und *wissenschaftlicher Taschenrechner* erforderlich ist.

### 2.3 Empirische Untersuchungen zu Prüfungs- und insbesondere Abituraufgaben

Empirische Ergebnisse zum Schwierigkeitsgrad oder zur Aufgabenqualität der Abituraufgaben sind nur wenige vorhanden. Kahnert (2014) konnte die Validität der Messung von Kompetenzen im Zentralabitur 2011 exemplarisch durch einen Vergleich von Abiturergebnissen und Leistungen im Mathematiktest der TIMSS/III-Studie nachweisen. Es zeigte sich, dass die Anforderungen im TIMSS/III-Test zur voruniversitären Mathematik vergleichbar sind mit denen im Abitur. Im TIMSS/III-

Tests zeigten Abiturientinnen und Abiturienten jedoch unbefriedigende Leistungen etwa bezüglich adäquater Grundvorstellungen (Rolfes et al. 2020).

Bezogen auf die Schwierigkeit von Abituraufgaben im Fach Mathematik wurde nach der Einführung des Zentralabiturs in Nordrhein-Westfalen festgestellt, dass der obere Schwierigkeitsbereich deutlich unterrepräsentiert ist und die Auswahlaufgaben bezüglich des Schwierigkeitsniveaus ähnlich konzipiert sind (Kahnert 2014). Zudem ist eine vergleichsweise geringe Berücksichtigung prozessbezogener Kompetenzen wie mathematisches Modellieren in der schriftlichen Abiturprüfung im Fach Mathematik bei den Beispielaufgaben für die Abiturprüfung festzustellen (Greefrath et al. 2017). Dieses Phänomen findet sich ebenso in Österreich (Siller und Greefrath 2020). Insgesamt werden Optimierungen von Prüfungsaufgaben für möglich gehalten (Jahnke et al. 2014; Kühnel 2015), etwa durch Ausweiten der Aufgaben zu prozessbezogenen Kompetenzen. Es gibt beispielsweise Entwicklungen von Prüfungsaufgaben, die das Modellieren mit authentischem und relevantem Realitätsbezug integrieren (Sube et al. 2020).

Ergebnisse aus einer Untersuchung zu Prüfungen zum Erwerb des mittleren Schulabschlusses zeigen zudem, dass die prozessbezogenen Kompetenzen sehr unausgewogen verteilt sind und eher das formal-technische Arbeiten dominiert (Kühn und Drüke-Noe 2013). Auch das kognitive Anspruchsniveau des mathematischen Modellierens ist bei den zentralen Prüfungen nach Klasse 10 im Vergleich gering. Darüber hinaus bleibt vor allem der Anforderungsbereich III der Verallgemeinerung und Bewertung annähernd gänzlich unberücksichtigt (Scheja 2017). Dies steht im Einklang mit der Untersuchung von Aufgabensets im Rahmen des COACTIV-Projekts (Jordan et al. 2008; Neubrand et al. 2013). Das kognitive Potenzial von Klausuraufgaben ist zwar im Bereich des Argumentierens und Modellierens am Gymnasium etwas höher als an den anderen Schulformen, ist aber insgesamt als gering einzuschätzen (Baumert et al. 2010).

### 2.4 Digitale Werkzeuge in der Abiturprüfung

Digitale Werkzeuge sind seit den 1980er-Jahren verfügbar und werden deshalb seit über 25 Jahren in Unterricht und Abiturprüfungen eingesetzt (Schmidt-Thieme und Weigand 2015). Die verwendeten Geräte besitzen neben den Funktionalitäten eines wissenschaftlichen Taschenrechners (WTR) weitere Werkzeuge. Grafikfähige Taschenrechner (GTR) mit einem integrierten Funktionenplotter gibt es seit den 1980er-Jahren, Computeralgebrasysteme (CAS) und Tabellenkalkulation auf Taschenrechnern seit Mitte der 1990er-Jahre. Heutzutage zählt man zu CAS üblicherweise die gesamte Programmvielfalt und diese ist auch als App bzw. Software verfügbar. Prinzipiell sind CAS seit 1996 für das Abitur verfügbar und seitdem wird die Frage des Einsatzes von CAS in Prüfungen diskutiert (Brown 2003, 2010; Greefrath et al. 2008).

CAS kann bei entsprechendem Einsatz im Unterricht Lernvorteile bringen (Barzel 2012; Drijvers et al. 2016; Hoyles und Lagrange 2010; Zbiek et al. 2007), zum Beispiel durch die Möglichkeiten mathematische Zusammenhänge zu entdecken (Burrill et al. 2002), konzeptuelle Fähigkeiten zu fördern (Ellington 2006; Kieran und Drijvers 2006), vielfältige und dynamische Darstellungsmöglichkeiten zu nutzen

(Barzel 2012; Burrill et al. 2002; Hillmayr et al. 2020; Hoyles und Lagrange 2010; Weigand und Weth 2010).

Es zeigt sich jedoch, dass die Aufgabenstellungen in CAS-Prüfungen kaum verändert sind gegenüber Prüfungen ohne CAS (Brown 2003; Weigand 2006). Auch hinsichtlich der Modellierungsteilprozesse konnten keine deutlichen Unterschiede bei den Abituraufgaben mit bzw. ohne CAS in Bayern in den Jahren 2012 bis 2017 festgestellt werden (Beck 2020). Bauer und Tschacher (2006) begründen die Ähnlichkeit von Aufgabenstellungen in Prüfungen mit oder ohne CAS damit, dass der Erschließungsprozess beim Lösen der Aufgabe der gleiche ist. Dies gilt in ähnlicher Weise für Prüfungen, in denen alleine auf Grafikfähigkeit fokussiert wird (Brown 2010). Jedoch kann die Einführung von CAS in Prüfungen das Potenzial bieten, die Kontrolle der Lösungsstrategie und damit auch die daraus resultierende Form der Lösung von der Hand der Prüfenden in die Hand der Lernenden zu transferieren (Brown 2003). Dabei müssen die Lernenden jedoch mit der Funktionsweise ihres CAS sehr vertraut sein und die Schritte kennen, die zur Lösung komplexer Probleme erforderlich sind (Brown 2001). Es kann vermutet werden, dass durch die Einführung digitaler Werkzeuge allein keine Veränderung der in den Prüfungen bewerteten mathematischen Kompetenzen auftritt (Brown 2010).

Die Rolle des Einsatzes digitaler Werkzeuge bei der Bearbeitung von Prüfungsaufgaben kann sehr unterschiedlich sein (vgl. Barzel und Greefrath 2015). Sie ist *neutral*, wenn das digitale Werkzeug bei der Lösung der Aufgabe nicht weiter hilfreich ist. Sie ist *optional*, d. h. nützlich, aber nicht unbedingt notwendig. Oder der Werkzeugeinsatz ist *notwendig* für die Lösung der Aufgabe, also erforderlich, weil die Aufgabe ohne Werkzeug nicht lösbar wäre (vgl. Brown 2003). Für Prüfungen ist eine Mischung dieser drei Einsatztypen im Hilfsmittelteil möglich, damit die Anforderungen beim Medieneinsatz in Prüfungen so sind, wie sie idealerweise im Unterricht erfolgen sollten (Barzel und Klinger 2022; Biggs 1996).

## 3 Forschungsfragen

Während die Klassifikation aus dem COACTIV-Projekt und die entsprechenden Erweiterungen (Drüke-Noe 2014; Scheja 2017) die Kategorien für kognitive Aktivierung mit Parallelen zu den prozessbezogenen Kompetenzen aus den Bildungsstandards aufzeigen, gibt es in bisherigen Studien zu Abschlussprüfungen Ergebnisse, die auf eine vergleichsweise geringe Berücksichtigung prozessbezogener Kompetenzen hindeuten (Greefrath et al. 2017; Kühn und Drüke-Noe 2013; Scheja 2017). Insbesondere vor dem Hintergrund einer intensiven Diskussion über Abituraufgaben im Allgemeinen (Steinmetz 2013) und speziell im Fach Mathematik (Bruder 2021; Jahnke et al. 2014; Kühnel 2015) interessiert das kognitive Potenzial in aktuellen Abituraufgaben. Weiterführend ist auf der Basis von Diskussionen um die dort integrierte Werkzeugverwendung (Beck 2020; Greefrath et al. 2008) diese in Verbindung mit dem kognitiven Potenzial zu untersuchen. Wir konzentrieren uns auf das bedeutendste Sachgebiet Analysis und stellen daher die folgende Forschungsfrage:

**(F)** Welches kognitive Potenzial haben aktuelle Abituraufgaben im Fach Mathematik?

Im Detail wird untersucht:

- (F1) Welches kognitive Potenzial hinsichtlich prozessbezogener Kompetenzen (Mathematisch Argumentieren, Probleme mathematisch lösen, Mathematisch Modellieren, Mathematische Darstellungen verwenden, Technisches Arbeiten, Mathematisch Kommunizieren) haben die Abituraufgaben?
- (F2) Welches kognitive Potenzial hinsichtlich Grundvorstellungen zum jeweiligen Inhaltsaspekt haben die Abituraufgaben?
- (F3) Inwiefern gibt es Unterschiede hinsichtlich des kognitiven Potenzials aktueller Abituraufgaben, die mit dem Hilfsmittel CAS bearbeitet werden sollen, im Vergleich zu jenen mit Hilfsmittel WTR und ist das Hilfsmittel unterdrückt, neutral, optional oder notwendig für den Lösungsprozess?

## 4 Methode

Analysiert wurden Abituraufgaben für das Fach Mathematik, die im Pool des Instituts zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (IQB) verfügbar sind. Dabei wurde eine Beschränkung auf das Sachgebiet Analysis gewählt, da in diesem Sachgebiet einerseits inhaltlich vergleichbare Aufgaben für die verschiedenen Hilfsmittel vorliegen. Konkret existieren hier einige Aufgaben innerhalb des vom IQB bereitgestellten Pools, die eine deutliche Parallelisierung zwischen den beiden Hilfsmittel-Kategorien aufweisen. Andererseits war die besondere Relevanz des genannten Sachgebiets aufgrund des oben dargestellten hohen Anteils in Abiturprüfungen grundlegend. Diese genannten Aufgaben sollen hinsichtlich ihres kognitiven Potenzials aus zwei verschiedenen Blickwinkeln bewertet werden (F1 und F2), um im Anschluss etwaige Unterschiede zwischen Aufgaben mit einem CAS bzw. WTR als zugelassenem Hilfsmittel[1] herauszustellen (F3). Zur Untersuchung der Aufgaben wurde eine Kombination aus qualitativem und quantitativem Vorgehen gewählt, welches zunächst ein Rating der einzelnen Teilaufgaben hinsichtlich der ausgewählten Kategorien und danach statistische Vergleichsanalysen beinhaltet. In Kohärenz mit vorangegangenen Studien (etwa Jordan et al. 2008; Scheja 2017) können die einzelnen Teilaufgaben nach angesprochenen mathematischen Kompetenzen und Grundvorstellungen eingeordnet werden. Darüber hinaus soll analysiert werden, inwiefern die Funktionalitäten des jeweiligen zur Verfügung stehenden digitalen Werkzeugs zur Lösung der Aufgabe beitragen können. Im Rahmen der vorliegenden Studie wurden die Abituraufgaben nicht als Ganzes in das Kategoriensystem eingeordnet. Stattdessen wurde ein Ansatz gewählt, in dem jede einzelne Teilaufgabe bzw. jeder einzelne darin enthaltene Arbeitsauftrag betrachtet und geratet wurde, um eine genauere und differenziertere Analyse der geforderten Tätigkeiten durchführen zu können. So wurden Teilaufgaben noch einmal unterteilt, wenn zwei oder mehr differente Arbeitsaufträge innerhalb der Teilaufgabenformulierung auftreten.

[1] Im Folgenden verwenden wir der Lesbarkeit halber die Termini CAS- bzw. WTR-Aufgabe.

Als Gegenstand der Analyse wurden die vom IQB veröffentlichten Mathematik-Abituraufgaben für die Jahre 2020 und 2021 gewählt. Hierbei wurde sowohl das erhöhte als auch das grundlegende Niveau im Sachgebiet Analysis betrachtet. Insgesamt beziehen wir uns auf vierzehn Abituraufgaben mit 203 bewerteten Arbeitsaufträgen. Von den insgesamt 203 kodierten Arbeitsaufträgen waren 88 so konzipiert, dass sie mithilfe eines CAS als zugelassenes Hilfsmittel gelöst werden konnten. Die verbliebenen 115 Arbeitsaufträge waren mithilfe eines WTR zu lösen.

Auf Basis eines Kategoriensystems, welches zum einen deduktiv bisherige Studien zur kognitiven Aktivierung (Drüke-Noe 2014; Jordan et al. 2008; Scheja 2017) sowie eine Einordnung der erforderten Mediennutzung einbezieht (Brown 2009, 2010) und zum anderen eine induktive Weiterentwicklung dieser Kategorien aufgrund des Bezugs zur Sekundarstufe II erforderte, erfolgte ein zu weiteren Studien vergleichbares Konsensrating (Kaiser und Schwarz 2010; Kunter und Baumert 2006). Für das Konsensrating standen mit den Autorinnen und Autoren dieser Arbeit insgesamt vier Rater zur Verfügung. Nach der gemeinsamen Erstellung eines initialen Kodiermanuals wurden durch diese unabhängig voneinander Kodierungen einzelner Aufgaben vorgenommen. Im Anschluss erfolgte eine Gruppendiskussion aller Beteiligten mit einer gemeinsamen Konsensbildung. Bei übereinstimmender Kodierung wurde jeweils geprüft, ob aus denselben Gründen übereinstimmend kodiert wurde. Bei voneinander abweichenden Ratings wurden Ursachen für etwaige Abweichungen der Ratings und etwaige Unklarheiten im Kodiermanual identifiziert. Schließlich erfolgte jeweils aufbauend auf diese Diskussion eine Spezifikation des Kodiermanuals mit dem Ziel, entsprechende Unstimmigkeiten künftig auszuschließen. Sich hierdurch mitunter ergebende Ankerbeispiele wurden zudem in das Manual aufgenommen.

Exemplarisch lässt sich dieser Prozess anhand der Aufgabe in Abb. 2 für die Kategorie „Grundvorstellungen (G)“ verdeutlichen. Hier kam es beim initialen Kodieren in den Teilaufgaben a) und c) jeweils zur vollständigen Übereinstimmung aller Rater. Die jeweiligen Begründungen wurden kurz ausgetauscht und ebenfalls als übereinstimmend beurteilt. Lediglich in Teilaufgabe b) kam es zu voneinander abweichenden Kodierungen dahingehend, dass sowohl Kodierungen des Werts 0 (Grundvorstellungen nicht benötigt) als auch 1 („eine Grundvorstellung benötigt“) unter den Wertenden existierten. Da es sich um eine Aufgabe mit CAS als zugelassenem Hilfsmittel handelt, haben Lernende prinzipiell die Möglichkeit, den Funktionsgraphen zu plotten oder die jeweiligen Grenzwerte explizit bestimmen zu lassen. Prinzipiell ließen sich Letztere daher als recht automatisierte Handlung ohne inhaltliches Denken ermitteln. In Kombination mit dem vorhandenen „Beschreibe“-Operator ist jedoch zur vollständigen Bearbeitung der Teilaufgabe von einer bewussten Explikation der Annäherungsvorstellung eines Grenzwertes auszugehen. Dies schlug sich abschließend auch in einer entsprechenden Spezifikation des Kodiermanuals nieder.

In einem derartigen Prozess erfolgte die Kodierung von insgesamt 83 Teilaufgaben, welche sowohl dem grundlegenden und erhöhtem Niveau als auch den Hilfsmitteln CAS und WTR zuzuordnen sind. Das abschließend finalisierte Kategoriensystem samt Kodiermanual diente schließlich als Grundlage zur Kodierung der übrigen 120 Arbeitsaufträge. Hierbei erfolgte das Rating eines Auftrags jeweils durch zwei

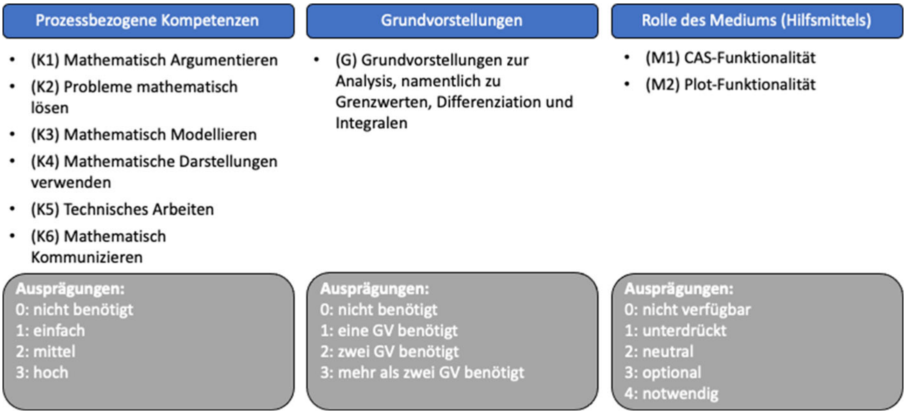


**Abb. 1** Resultierendes und für die Studie verwendetes Kategoriensystem

unabhängige Einschätzungen der vorherigen Rater. In diesem Prozess wurde eine gleichmäßige Aufteilung der insgesamt vier ausgebildeten Rater auf die Arbeitsaufträge aufgabenweise vorgenommen. Im Anschluss wurde von einem der beiden nicht am Rating dieser Aufgabe beteiligten Rater ein etwaig notwendiger Konsens gebildet. Dieser Konsens wurde in Einzelfällen, wie beispielsweise bei größeren Unstimmigkeiten, diskutiert, so dass abschließend für jeden der 203 Arbeitsaufträge eine durch die gesamte Gruppe legitimierte numerische Einordnung bzgl. jeder einzelnen Kategorie des gebildeten Kategoriensystems vorlag. Zur weiteren Verdeutlichung sowie aus Transparenzgründen ist das vollständige Kategoriensystem dem digitalen Anhang dieser Arbeit beigefügt. Eine Übersicht über die entstandenen Kategorien ist in Abb. 1 dargestellt.

Hierbei erfolgte die Kodierung der einzelnen Arbeitsaufträge entlang der Kategorien (K1) bis (K6) sowie (G) jeweils mit Kodes von 0 bis 3. Für die Kategorien (K1) bis (K6) weisen die Kodes Parallelen zu den durch die Bildungsstandards explizierten Anforderungsbereichen auf. Die beiden Kategorien (M1) und (M2), welche die Rolle des zur Verfügung stehenden Werkzeuges beschreiben sollen, wurden in den Stufen 0 bis 4 bewertet. Hierbei wird jeweils die Rolle bewertet, die das Vorhandensein einer Schlüsselfunktionalität des CAS-Hilfsmittels spielt (namentlich der Funktion einen Graphen anhand seines Terms zu plotten bzw. eine Gleichung bzw. Funktion symbolisch zu lösen bzw. abzuleiten). Konkret wird hierdurch allen WTR-Aufgaben in den beiden Kategorien generisch der Kode 0 zugeordnet. Für die CAS-Aufgaben ergibt sich im Falle einer durch die Aufgabenstellung herbeigeführten Unterdrückung der Verwendbarkeit der jeweiligen Funktionalität der Kode 1. Wurde das Werkzeug nicht bewusst unterdrückt, ergibt sich jedoch durch sein Vorhandensein kein zusätzliches Potenzial zur Lösung des Arbeitsauftrages, wurde mit Kode 2 kodiert. Bei der Möglichkeit einer Vorteilsnahme durch das Vorhandensein der Funktionalität wurde mit 3 kodiert. Kode 4 stellt abschließend die Situation dar, dass die Verwendung der betrachteten Funktionalität aus Perspektive eines realistischen Schülerniveaus zur Bearbeitung des Arbeitsauftrages unumgänglich war.

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{10} x \cdot (3 - x) \cdot e^x$ und $x \in \mathbb{R}$.

**1 a** Geben Sie die Nullstellen von f an. Zeigen Sie rechnerisch, dass der Graph von f im ersten Quadranten einen Wendepunkt hat.

**b** Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen von f für $x \to -\infty$ und $x \to +\infty$.

**c** Es gibt zwei Tangenten an den Graphen von f, deren Steigung $\frac{3e}{10}$ ist. Berechnen Sie für eine dieser Tangenten die y-Koordinate des Schnittpunkts mit der y-Achse sowie die Größe des Winkels, unter dem sie die y-Achse schneidet.

| Arbeitsauftrag | (K1) | (K2) | (K3) | (K4) | (K5) | (K6) | (G) | (M1) | (M2) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 a 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 3 | 2 |
| 1 a 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 b | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 |
| 1 c | 0 | 2 | 0 | 0 | 3 | 0 | 1 | 3 | 2 |

**Abb. 2** Die ersten drei Teilaufgaben einer Aufgabe aus dem Pool für das Jahr 2020, grundlegendes Niveau, Prüfungsteil B, Sachgebiet Analysis und digitales Hilfsmittel „CAS“ sowie die zugehörigen Kodierungen mithilfe des in diesem Beitrag verwendeten Kategoriensystems

Eine detailliertere Beschreibung der einzelnen Bewertungsstufen aller Kategorien ist zusätzlich dem Kodiermanual im Anhang zu entnehmen.

Zur weiteren Verdeutlichung des methodischen Vorgehens ist in Abb. 2 exemplarisch ein Teil einer kodierten Abituraufgabe des IQB-Pools sowie das zugehörige Ergebnis der entsprechenden Kodierung dargestellt. Während Teilaufgabe a aus zwei eher isolierten Arbeitsaufträgen besteht, finden sich in den Teilaufgaben b bzw. c jeweils nur ein einzelner bzw. zwei stark verknüpfte Arbeitsaufträge, so dass der vorliegende Ausschnitt insgesamt als vier Kodiereinheiten gedeutet wurde. Für diese Arbeitsaufträge werden die Kompetenzen (K1), (K2), (K4) und (K6) nur einmalig benötigt, wohingegen das technische Arbeiten (K5) mehrfach sowie mit hohen Kodes auftritt. Insbesondere bei Teil c kommt es aufgrund der Notwendigkeit, verschiedene Teilverfahren sowie den Tangens zur Anwendung zu bringen, mit Kode 3 zur Höchstwertung. Mathematisches Modellieren ist im betrachteten Ausschnitt nicht relevant, so dass die Wertung durchgängig mit Kode 0 erfolgt. In Teilaufgabe b spielen Vorstellungen zu Grenzwerten sowie in Teilaufgabe c zur inhaltlichen Interpretation der Ableitungsfunktion eine Bedeutung, sodass die Kodierung hier jeweils mit 1 erfolgt. Die in der Prüfung zur Verfügung stehende Funktionalität „CAS“ (M1) kann bei den Aufträgen a1 sowie c optional genutzt werden (Kode 3), wohingegen ihre Nutzung in a2 durch das Adjektiv „rechnerisch“ in der entsprechenden Aufgabenstellung unterdrückt wird (Kode 1). Für Teil b ist das Vorhandensein dieser Funktionalität nicht von Bedeutung (Kode 2 – neutral). Ähnlich verhält es sich für die Funktionalität „Plot“ (M2): Während ihr Vorhandensein sich für die Aufträge a1 sowie c weitgehend neutral verhält (Kode 2), wird das rein grafische Lösen in Auftrag a2 durch die genannte Formulierung ebenfalls unterdrückt (Kode 1). Arbeitsauftrag b hingegen lässt eine rein grafische Betrachtung zu, sodass die Kodierung mit Kode 3

**Tab. 1** Werte für Cohens Kappa hinsichtlich der einzelnen Skalen

| Kategorie | Cohens Kappa |
|---|---|
| Argumentieren | 0,638 |
| Problemlösen | 0,466 |
| Modellieren | 0,812 |
| Darstellungen verwenden | 0,503 |
| Technisches Arbeiten | 0,643 |
| Kommunizieren | 0,580 |
| Grundvorstellungen | 0,743 |
| Funktion CAS | 0,666 |
| Funktion Plot | 0,711 |

als optional erfolgt. Insgesamt ist für die dargestellten Teilaufgaben eine hinsichtlich der betrachteten Funktionalitäten vollständig werkzeuglose Bearbeitung vorstellbar, sodass es an keiner Stelle zur Kodierung 4 kommt.

Insgesamt kann bei den beschriebenen Ratings der innerhalb der betrachteten Prüfungsaufgabenteile angesprochenen mathematischen Kompetenzen und Grundvorstellungen davon ausgegangen werden, dass ein höherer Kode-Wert mit einer größeren Komplexität der jeweiligen durch die Schülerinnen und Schüler zu leistenden kognitiven Aktivität einhergeht. Es kann daher von einem ordinalen Skalenniveau ausgegangen werden. Für entsprechende Vergleiche der Werte wird aufgrund des Skalenniveaus der nicht-parametrische Mann-Whitney-U-Test (im Folgenden der Einfachheit halber U-Test) verwendet, da dieser bei einem Vergleich zweier ungepaarter Stichproben auf höchstens ordinalem Skalenniveau Rückschlüsse darauf zulässt, ob die Werte einer betrachteten Gruppe systematisch höher bzw. geringer als jene einer anderen betrachteten Gruppe ausfallen (Bortz und Schuster 2010).

Da die vorliegende Arbeit einem kombinierten Design mit qualitativen wie quantitativen Elementen folgt, wurden im gesamten Forschungsprozess einschlägige Gütekriterien berücksichtigt, insbesondere durch das zentrale Element der Gruppeninterpretation (Steinke 2019).

Ein solch kombinierter Blickwinkel wird etwa durch die explizit für mathematikdidaktische Forschungsarbeiten hergeleiteten drei Grundsätze nach Kadijevich (2005) gewährleistet. Dieser benennt die Relevanz, die Signifikanz und die Strenge als Kriterien zur Klassifikation von Studien. Die Relevanz der vorliegenden Studie wurde einleitend dargestellt. Eine theoriegeleitete empirische Prüfung des Aufgabenpotenzials und der Rolle der dabei zugelassenen Hilfsmittel ist daher relevant und wurde bislang in Bezug auf zentrale Abituraufgaben hinsichtlich ihres kognitiven Potenzials noch nicht beschrieben. Durch die Identifikation dieser Forschungslücke ergibt sich die Signifikanz der Studie. Zur Explikation der wissenschaftlichen Strenge wurde zur Absicherung der Güte Cohens Kappa unter Verwendung der Einzelratings bestimmt. Die sich ergebenden Werte für die jeweiligen Bewertungsdimensionen sind in Tab. 1 dargestellt. Die Werte können für alle Kategorien als mindestens moderat, für die meisten Kategorien als substanziell (Landis und Koch 1977) interpretiert werden. Hierbei ist jedoch herauszustellen, dass es sich bei den betrachteten Kodes um einen Zwischenstand der Analyse handelt, auf dem noch das Konsensrating aufbaut. Darüber hinaus kann das hier entwickelte und im Anhang veröffentlichte Kodiermanual als Ausdruck der wissenschaftlichen Strenge betrachtet werden.

## 5 Ergebnisse

Die Darstellung der Ergebnisse gliedert sich nach den drei Forschungsfragen. Entsprechend wird zunächst ein allgemeiner Überblick zu den Ratings in Bezug auf die einzelnen Kategoriengegeben. Im Anschluss werden die Unterschiede der Aufgabenratings hinsichtlich der zur Verfügung stehenden Hilfsmittel beschrieben.

### 5.1 Kognitives Potenzial aktueller Abituraufgaben im Fach Mathematik hinsichtlich prozessbezogener Kompetenzen

Zur allgemeinen Beschreibung des kognitiven Potenzials der untersuchten Teilaufgaben soll zunächst eine deskriptive Statistik der Häufigkeitsverteilungen herangezogen werden. Einen Überblick zu den prozessbezogenen Kompetenzen liefert Tab. 2.

Die Verteilungen der einzelnen Ratings auf die vier Kodes (0 bis 3) zeigen allgemein geringe Werte hinsichtlich des kognitiven Potenzials in den jeweiligen allgemeinen mathematischen Kompetenzen. Dies lässt sich zum einen aus der seltenen Vergabe des Kodes 3 herleiten, welcher insgesamt in den sechs Kategorien, die für jede der 203 Arbeitsaufträge analysiert wurden, nur sechsmal vergeben wurde. Dabei ist herauszustellen, dass die Kompetenzen Problemlösen, Modellieren, Darstellungen verwenden und Kommunizieren nicht im höchsten Kode 3 gefordert werden. Darüber hinaus ist erkennbar, dass bei allen Kompetenzen außer im technischen Arbeiten Kode 1 häufiger vorkommt als die Kodes 2 und 3 zusammen. Zudem fällt auf, dass die Vergabe von Kode 2 beim Modellieren im Vergleich zu allen anderen Prozessen deutlich geringer vorkommt.

### 5.2 Kognitives Potenzial aktueller Abituraufgaben im Fach Mathematik hinsichtlich der Grundvorstellungen

In Bezug auf die Frage zu den Grundvorstellungen, die innerhalb der jeweiligen Teilaufgaben angesprochen wurden, ergibt sich ein Maximum von Kode 2 und ein Minimum von Kode 0. Dies bedeutet, dass eine Aktivierung von mehr als 2 Grundvorstellungen in Kombination in keiner der Teilaufgaben naheliegend war. Dahinge-

**Tab. 2** Häufigkeiten der Ratings zu den prozessbezogenen Kompetenzen

| Häufigkeit von | Argumentieren | Problemlösen | Modellieren | Darstellungen verwenden | Technisches Arbeiten | Kommunizieren |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Kode 0 | 146 | 125 | 150 | 108 | 66 | 125 |
| Kode 1 | 34 | 45 | 51 | 71 | 39 | 57 |
| Kode 2 | 22 | 33 | 2 | 24 | 93 | 21 |
| Kode 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 |

gen wurden bei insgesamt 129 der 203 Arbeitsaufträge keinerlei Grundvorstellungen angesprochen. Eine Grundvorstellung wurde bei insgesamt 73 Arbeitsaufträgen adressiert und die nicht-triviale Kombination zweier Grundvorstellungen war bei einem Arbeitsauftrag intendiert.

### 5.3 Unterschiede bezüglich des kognitiven Potenzials aktueller Abituraufgaben im Fach Mathematik hinsichtlich CAS bzw. WTR-Aufgaben und Notwendigkeit der CAS-Nutzung

Hinsichtlich der Rolle des digitalen Werkzeugs wurde eine Unterteilung der Hilfsmittel nach Funktionalitäten vorgenommen. Deshalb wurde beim Rating unterteilt in die anzuwendende eigentliche CAS-Funktion in Form der Verarbeitung algebraischer Ausdrücke sowie die Plot-Funktion (vgl. Kodiermanual). Insgesamt waren bei der Kodierung der zwei Funktionen fünf Kodes zu vergeben, wobei eine 4 für eine notwendige Nutzung, eine 3 für einen optionalen und demnach potenziell hilfreichen Einsatz, eine 2 für eine neutrale, als nicht Potenzial-behaftete Verwendung, eine 1 für eine durch die Operationalisierung des Arbeitsauftrags unterdrückte Verwendung des digitalen Werkzeugs und eine 0 für die nicht zur Verfügung stehende Funktionalität vergeben wurde.

In Tab. 3 ist eine Übersicht der Häufigkeiten in den beschriebenen fünf Stufen dargestellt. Hierbei wurden alle Teilaufgaben inkludiert, sodass sich die Verfügbarkeit der Funktionen CAS und Plot bei den WTR-Aufgaben in dem Kode 0 widerspiegelt.

Die beiden Kategorien CAS und Plot sind also vor dem Hintergrund zu betrachten, dass hier insgesamt 88 Arbeitsaufträge über den Kode 0 hinauskommen können. Es fällt auf, dass in nur zwölf Fällen die alleinstehenden Funktionalitäten des CAS notwendig zur Bearbeitung herangezogen werden mussten.

Hinsichtlich der Forschungsfrage, die auf etwaige Unterschiede in Bezug auf das Potenzial der Arbeitsaufträge in Abhängigkeit des jeweils zugelassenen Hilfsmittels abzielt, können zunächst die Häufigkeiten der vergebenen Ratings zu den mathematischen Kompetenzen betrachtet werden.

In Abb. 3 ist der Trend erkennbar, dass bei den Arbeitsaufträgen mit CAS als Hilfsmittel in allen sechs dargestellten Kategorien gleiche oder höhere Werte erreicht werden als bei jenen Arbeitsaufträgen, bei denen ausschließlich ein WTR als Hilfsmittel zur Verfügung stand. Entsprechend wurde mithilfe des nicht-parametrischen U-Tests (ungepaarte Stichproben, ordinales Skalenniveau) geprüft, ob in den CAS-Abituraufgaben häufiger prozessbezogene Kompetenzen gefordert werden als in den WTR-Aufgaben. Die finalen Teststatistiken sind Tab. 4 zu entnehmen.

**Tab. 3** Häufigkeiten der Ratings in Bezug auf die Rolle des digitalen Werkzeugs unter Betrachtung der jeweiligen Funktionalität. (Die 115 Arbeitsaufträge der WTR-Aufgaben wurden für beide Merkmale „CAS“ und „Plot“ mit Kode 0 bewertet.)

| Häufigkeit von | CAS | Plot |
|---|---|---|
| Kode 0, nicht verfügbar | 115 | 115 |
| Kode 1, unterdrückt | 10 | 2 |
| Kode 2, neutral | 28 | 40 |
| Kode 3, optional | 38 | 44 |
| Kode 4, notwendig | 12 | 2 |

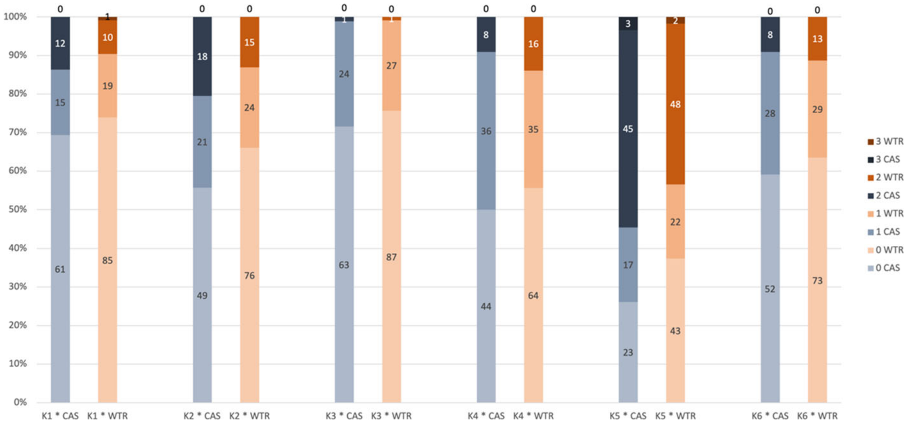


**Abb. 3** Grafische Darstellung der Kodierhäufigkeiten der prozessbezogenen Kompetenzen differenziert hinsichtlich des Aufgabentyps (CAS bzw. WTR)

**Tab. 4** Ergebnisse des U-Tests für die Unterscheidung nach verfügbarem Hilfsmittel

| Kategorie | Argumentieren | Problemlösen | Modellieren | Darstellungen verwenden | Technisches Arbeiten | Kommunizieren |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Differenz mittlerer Ränge | –5,17 | –11,74 | –4,15 | –2,77 | –14,03 | –3,13 |
| Signifikanzniveau (*p*-Wert) | 0,430 | 0,104 | 0,513 | 0,711 | 0,069 | 0,663 |

Insgesamt weist keine der Kategorien einen mit dem Test feststellbaren signifikanten Verteilungsunterschied auf. In Bezug auf die angesprochenen Grundvorstellungen lässt sich ein ähnliches Ergebnis beschreiben: Die Differenz der mittleren Ränge beträgt –8,56. Das Signifikanzniveau des U-Tests ist hier mit 0,216 anzugeben und liegt demnach ebenfalls über dem angesetzten Niveau von 0,05.

## 6 Diskussion

In der hier vorgestellten Studie wurde das kognitive Potenzial von Abituraufgaben im Fach Mathematik aus dem Aufgabenpool des Instituts für Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (IQB) untersucht. Dazu wurde ein Kategoriensystem zur Beschreibung des kognitiven Potenzials entwickelt, das die Stufung der prozessbezogenen Kompetenzen ähnlich den Anforderungsbereichen der Bildungsstandards aufgreift und sich am Framework des COACTIV-Projekts orientiert. Insbesondere wurden Grundvorstellungen als Kategorie integriert, da Grundvorstellungen Voraussetzung für verständiges Arbeiten mit einem mathematischen Konzept sind (Greefrath et al. 2016). Erweitert wurde das Kategoriensystem mit Blick auf die für das Abitur relevante Nutzung digitaler Mathematikwerkzeuge. Aufgrund der Studie wurde eine insgesamt geringe Ausprägung hinsichtlich des kognitiven Potenzials in allen untersuchten prozessbezogenen Kompetenzen sowie für die Integration von Grundvorstellungen festgestellt. Bezogen auf die Nutzung digitaler Mathematikwerkzeuge wird das mediale Potenzial nicht ausgeschöpft, d.h. es werden kaum Aufgaben verwendet, bei denen CAS-Funktionalitäten wirklich benötigt werden. Auch die Nutzung der Plot-Funktion ist nur in wenigen Aufgaben tatsächlich erforderlich, in weiteren aber durchaus hilfreich. Signifikante Unterschiede in Bezug auf das kognitive Potenzial für die Aufgabengruppen mit CAS bzw. mit WTR konnten nicht festgestellt werden.

### 6.1 Kognitives Potenzial aktueller Abituraufgaben im Fach Mathematik

Die geringen Anzahlen höherer Kodes hinsichtlich des kognitiven Potenzials in allen untersuchten prozessbezogenen Kompetenzen können im Detail weiter analysiert werden. Hier zeigt sich, dass das Modellieren und das Argumentieren sowie das Kommunizieren nur geringe Werte aufweisen. Dies deutet darauf hin, dass das kognitive Potenzial der untersuchten Abituraufgaben im Fach Mathematik in den Jahren 2020 und 2021 für diese prozessbezogenen Kompetenzen am geringsten ist.

Dies steht im Einklang mit bisherigen Studien, dass sich Prüfungsaufgaben in der Mittelstufe vor allem auf niedrigere Anforderungsbereiche und technische Kompetenzen konzentrieren (vgl. Drüke-Noe 2014; Jordan et al. 2008; Scheja 2017). Im Unterschied zu diesen Ergebnissen ist allerdings zu bemerken, dass die Bewertungen im Argumentieren hier für die Abituraufgaben deskriptiv höher liegen als im Modellieren, dies ist für Abschlussprüfungen in der Sekundarstufe I umgekehrt (Kühn und Drüke-Noe 2013; Scheja 2017). Dieser Unterschied zwischen dem Modellieren und dem Argumentieren könnte dadurch begründet sein, dass die mehrschrittige Modellierung (Kode 2) in Unterricht und Prüfungen der Oberstufe weniger tradiert ist als die mehrschrittige Argumentation. Die Ergebnisse zeigen eine Veränderung im Fokus der Aufgaben von der Sekundarstufe I zur Sekundarstufe II, wenn auch auf einem niedrigen Niveau des kognitiven Potenzials. Dies steht im Einklang mit der Untersuchung von Beispielaufgaben für die schriftlichen Abiturprüfung im Fach Mathematik bezüglich des geringen Vorkommens von Aufgaben zum mathematischen Modellieren (Greefrath et al. 2017) und verdeutlicht, dass mögliche Vorschläge zur Weiterentwicklung von Abituraufgaben mit Anwendungsbezug geprüft werden sollten (Sube et al. 2020).

Die für die Abschlussprüfungen der Sekundarstufe I festgestellte geringe Berücksichtigung des Anforderungsbereichs III der Verallgemeinerung und Bewertung (Scheja 2017) ist auch für die Abiturprüfung zu konstatieren. Dies bestätigt frühere Studien zum Zentralabitur in Nordrhein-Westfalen (Kahnert 2014, S. 271 f.). Mögliche hohe Anforderungen in der Abiturprüfung lassen sich nach den erhobenen Daten in erster Linie durch das technische Arbeiten erklären. Es lässt sich zusammenfassen, dass in den untersuchten Abituraufgaben und auf Basis des entwickelten Kodiermanuals ein geringer Anteil höherer kognitiver Aktivierung in den prozessbezogenen Kompetenzen, insbesondere Argumentieren, Problemlösen, Modellieren, Darstellungen verwenden und Kommunizieren, festzustellen ist. Dies ist aufgrund der Auswirkungen von Prüfungen auf den Mathematikunterricht (Prodromou 1995; Sabio et al. 2015) sowie der besonderen Beachtung der Abiturprüfung im Fach Mathematik (Bruder 2021; Kahnert 2014; Kühnel 2015) als problematisch anzusehen, da so auch eine geringe kognitive Aktivierung der Schülerinnen und Schüler im Rahmen des schulischen Lernens entstehen könnte.

Ein weiterer Aspekt ist das geringe Potenzial bei der Aktivierung von Grundvorstellungen. So sind einerseits für weniger als die Hälfte der untersuchten Aufgaben Grundvorstellungen erforderlich und andererseits eine Aktivierung mehrerer Grundvorstellungen für die Bearbeitung der Aufgaben praktisch nicht erforderlich. Da Grundvorstellungen als wesentliche Voraussetzung für die Entwicklung prozessbezogener Kompetenzen betrachtet werden können (Blum et al. 2004b), könnten diese Ergebnisse mit dem geringen kognitiven Potenzial der Aufgaben bezüglich wichtiger prozessbezogener Kompetenzen zusammenhängen. Auch dies könnte – ähnlich wie oben beschrieben – Auswirkungen auf die Vermittlung von Grundvorstellungen im Mathematikunterricht haben. Dies ist vor dem Hintergrund der besonderen Bedeutung von Grundvorstellungen (Vom Hofe und Blum 2016), z. B. im Sachgebiet Analysis (Greefrath et al. 2016), problematisch.

### 6.2 Vergleich des kognitiven Potenzials aktueller Abituraufgaben mit dem Hilfsmittel CAS bzw. WTR

Erstaunlich gering ist auch die erforderliche Nutzung der jeweils vorgesehenen digitalen Mathematikwerkzeuge. Dies ist vor dem Hintergrund interessant, dass in dieser Studie nicht die Aufgaben aus dem hilfsmittelfreien Prüfungsteil betrachtet wurden, sondern nur solche, in denen auch digitale Werkzeuge vorgesehen sind. Trotz des großen Potenzials digitaler Werkzeuge und insbesondere auch CAS im Unterricht (Barzel 2012; Hillmayr et al. 2020) zeigen die Ergebnisse hier, dass eine Nutzung nur in relativ wenigen Aufgaben wirklich erforderlich ist. Die Mischung der drei Einsatztypen (von neutral bis notwendig) wie sie üblicherweise im Unterricht angestrebt wird (Barzel und Klinger 2022), wird in den Abituraufgaben nicht erreicht. Auch dieses Ergebnis könnte durch den Backwash-Effekt Auswirkungen auf den Unterricht haben.

Die Vermutung, dass die prozessbezogenen Kompetenzen mit CAS durch die untersuchten Abituraufgaben ausdifferenzierter erfasst werden, indem auch höhere Anspruchsniveaus integriert werden, lässt sich nicht bestätigen. Dies steht im Einklang zu den Ergebnissen anderer Studien, dass CAS-Aufgaben im Gegensatz zu WTR-Aufgaben in Prüfungen kaum verändert sind (Brown 2003; Weigand 2006). Zwar ist es unbestritten, dass die Nutzung von CAS bei entsprechendem Einsatz im Unterricht Lernvorteile bringen kann (Barzel 2012; Drijvers et al. 2016; Hoyles und Lagrange 2010; Zbiek et al. 2007), jedoch zeigen sich diese Vorteile etwa durch das Entdecken von Zusammenhängen (Burrill et al. 2002) und insbesondere durch die Nutzung vielfältiger und dynamischer Darstellungsmöglichkeiten (Barzel 2012; Hillmayr et al. 2020; Hoyles und Lagrange 2010). Hier ist denkbar, dass diese Möglichkeiten zwar im Unterricht vielfältig genutzt werden, in stark strukturierten Prüfungsaufgaben jedoch nicht so deutlich zum Einsatz kommen wie bereits frühere Studien zeigen (Brown 2003). Die hier gefundenen Ergebnisse bestätigen Ergebnisse anderer Studien, dass durch die Einführung digitaler Werkzeuge allein keine Veränderung der in den Prüfungen geforderten mathematischen Kompetenzen auftritt (Brown 2010).

### 6.3 Diskussion der Untersuchungsmethode

Zunächst ist die Aussagekraft der vorliegenden Studie zu diskutieren, da lediglich Aufgaben aus zwei Jahren und aus einem – wenn auch zentralen – Sachgebiet (Analysis) kodiert wurden. Eine solche Entscheidung wurde getroffen, um die parallelisierte Struktur von CAS- und WTR-Aufgaben, welche erstmals im Jahr 2020 durchgeführt wurde, zu verwenden und so die Aussagen der Vergleichbarkeit dieser beiden Arten besser begründen zu können. Für künftige Studien wäre es wünschenswert, weitere Aufgaben, sowohl in anderen Sachgebieten als auch aus anderen Jahrgängen, zu analysieren.

Bei der Analyse der Teilaufgaben wurde die Strukturierung dieser Teilaufgaben in Aufgaben nicht berücksichtigt. Auch wenn von einer relativen Unabhängigkeit der Teilaufgaben ausgegangen werden kann, wie es die Bildungsstandards vorschreiben (KMK 2012), könnte diese Struktur Einfluss auf die Ergebnisse haben, wenn die zusammengefassten Teilaufgaben ähnliche Merkmale bezüglich des kognitiven Potenzials haben.

Weiterhin ist anzumerken, dass andere als die hier angelegten Kriterien zusätzliche Informationen zur Analyse des kognitiven Potenzials liefern können. So wurden beispielsweise die Stimulustexte nicht analysiert. Diese Limitation ergibt sich jedoch aus der grundlegenden Orientierung an der Dimension „Kognitive Elemente des Modellierungskreislaufs“ im COACTIV-Framework (Jordan et al. 2008, S. 91), in welcher die prozessbezogenen Kompetenzen und die Grundvorstellungen analysiert werden.

Als wichtiges Werkzeug und Ergebnis des methodischen Prozesses ist das entwickelte Kodiermanual für Aufgaben der Sekundarstufe II herauszustellen, welches intensiv diskutiert und innerhalb von Konsensratings erweitert wurde. Die in Tab. 1 dargestellten Maßzahlen der Interraterreliabilität stellen einen moderaten bis guten Zwischenstand vor einem abschließenden Konsensrating dar. Eine weitere Ausdifferenzierung des Kodiermanuals mit Hilfe weiterer Aufgaben könnte die Zuverlässigkeit der Kodierung, insbesondere bezüglich benachbarter Stufen der einzelnen Kodes, weiter verbessern. In weiteren Studien sollte die Interraterreliabilität daher erneut überprüft werden. Weiterhin ist zu beachten, dass die Kategorien und ihre Ausprägungen in den Kodes nicht als ordinal-skaliert zu betrachten sind. So ist etwa fraglich, inwiefern die Kombination zweier Grundvorstellungen stets zu einer höheren kognitiven Aktivierung führt als die Verwendung einer einzelnen Grundvorstellung. Der im Rahmen dieser Studie entwickelte Prozess zweier unabhängiger Primärratings mit besagtem nachgeschalteten Konsensrating hat sich in diesem Zusammenhang insgesamt als praktikabel erwiesen.

## 7 Fazit und Ausblick

Während verwendete Prüfungsaufgaben als Hinweise auf das kognitive Aktivierungspotenzial des Mathematikunterrichts angesehen werden (Jordan et al. 2008), könnte die Bedeutung zentraler Prüfungsaufgaben durch den zusätzlichen Backwash-Effekt (Prodromou 1995; Sabio et al. 2015) noch größer sein. So lässt sich die hier vorgestellte Studie in die bisherige Diskussion hinsichtlich der Unterrichtsgestaltung vor dem Abitur einordnen. Ein Blick in die Geschichte zeigt, dass die Frage, welcher Mathematikunterricht den Schülerinnen und Schülern vor dem Abitur erteilt werden sollte, häufig und kontrovers diskutiert wurde (Bruder 2021).

Anknüpfend an die dargestellte Diskussion kann aufgrund der Relevanz von Abituraufgaben zusammengefasst werden, dass weitere Studien dieser Art notwendig sind, um auf der Basis empirischer Analysen Entscheidungen für die Beurteilung, aber auch zur Weiterentwicklung von Abituraufgaben treffen zu können. Dazu wäre ein sinnvoller Ansatzpunkt, die Lösungsquoten zu den einzelnen Teilaufgaben in die Analysen einzubeziehen.

Das entwickelte Kodiermanual kann in Studien für weitere Analysen von Abituraufgaben in anderen Themenbereichen wie Analytischer Geometrie oder Stochastik genutzt und weiterentwickelt werden. Ein solches Kodiermanual kann jedoch auch als Impuls für Prozesse der Aufgaben- und Qualitätsentwicklung in der Schulpraxis gesehen werden. So kann eine weitere Ausdifferenzierung der untersuchten prozessbezogenen Kompetenzen für die kriterienbezogene Aufgabenentwicklung und die Weiterentwicklung des schulischen Unterrichts genutzt und somit im Sinne eines positiven Backwash-Effekts verwendet werden. Zudem wäre eine Entwicklungsforschung im Sinne eines Design-Based-Research-Ansatzes dort denkbar, wo offenbar tradierte Vorbilder für Aufgaben mit kognitivem Potenzial fehlen (z. B. zum mehrschrittigen Modellieren, vgl. Tab. 2, oder zu CAS-spezifischen Aufgaben).

Auch wenn eine Erkenntnis dieser Studie ist, dass die untersuchten Abituraufgaben vornehmlich prozessbezogene Kompetenzen auf den unteren Niveaus erfassen, ist doch zu konstatieren, dass der kognitive Anspruch in allen prozessbezogenen Kompetenzen verortet ist und sich nicht nur auf das technische Arbeiten beschränkt. Offen bleiben hier Schlussfolgerungen in Bezug auf die im Unterricht tatsächlich vorhandenen kognitiven Aktivitäten. Hier wäre es wünschenswert zu untersuchen, ob eine stärkere Nutzung von Aufgaben mit hohem kognitivem Potenzial in zentralen Prüfungen auch Auswirkungen auf kognitive Aktivierung im Unterricht haben kann.

Mit Blick auf den Einsatz digitaler Hilfsmittel ergibt sich aufgrund der Erkenntnis, dass sich das kognitive Anspruchsniveau der Aufgabengruppen nicht signifikant unterscheidet, zum einen die Frage nach der Begründung für die Ausdifferenzierung in zwei Aufgabengruppen und zum anderen ein Bedürfnis nach gezielten Entwicklungsstudien zur Frage, durch welche spezifischeren Aufgabenformate sich das Potenzial der digitalen Medien (wie Funktionenplot und CAS) gezielt entfalten kann.

## 8 Anhang

### 8.1 Kodiermanual

Allgemeine Festlegung: Es wird kodiert, was von durchschnittlichen Schüler:innen bei der Aufgabenbearbeitung erwartet wird.

### 8.1.1 K1: Mathematisch Argumentieren

Unter Argumentieren (vgl. u. a. Hanna 1995) wird die Fähigkeit verstanden, eine geschlossene Argumentationskette zu präsentieren oder auch verschiedene Formen von mathematischen Argumentationen zu verstehen bzw. zu bewerten (vgl. Jordan et al. 2006). Hierzu gehören sämtliche Arten von Begründungen, sowie das Verstehen und Bewerten gegebener mathematischer Aussagen. Typische Formulierungen, die auf die Kompetenz des Argumentierens hinweisen, sind beispielsweise „Begründen Sie!“, „Widerlegen Sie!“, „Gibt es?“ oder „Gilt das immer?“ (vgl. KMK 2012; Tab. 5).

### 8.1.2 K2: Probleme mathematisch lösen

Als Problem werden Aufgaben angesehen, in denen der Ansatz nicht explizit durch die Aufgabenstellung vermittelt wird. Bei derartigen Aufgaben kann es auch notwendig sein, einen Rückbezug vom ermittelten Resultat auf die Ausgangsfrage zu schaffen (vgl. Jordan et al. 2006). Heuristische Prinzipien, wie z. B. „Skizze anfertigen“, „systematisch probieren“, „zerlegen und ergänzen“, „Symmetrien verwenden“, „Extremalprinzip“, „Invarianten finden“ sowie „vorwärts und rückwärts arbeiten“, werden gezielt ausgewählt und angewendet (vgl. KMK 2012; Tab. 6).

### 8.1.3 K3: Mathematisch Modellieren

Mathematisches Modellieren wird in realweltlichen bzw. außermathematischen Aufgaben benötigt, in denen der mathematische Ansatz nicht explizit durch die Aufgabenstellung vermittelt wird. Es lassen sich also direkt alle innermathematischen Aufgaben ausschließen (s. Kode 0). Bei derartigen Aufgaben kann es auch notwendig sein, einen Rückbezug vom ermittelten Resultat auf die Ausgangsfrage zu schaffen (vgl. Jordan et al. 2006). Hierzu gehört sowohl das Konstruieren passender mathematischer Modelle als auch das Verstehen oder Bewerten vorgegebener Modelle. Typische Teilschritte des Modellierens sind das Strukturieren und Vereinfachen gegebener Realsituationen, das Übersetzen realer Gegebenheiten in mathematische Modelle, das Interpretieren mathematischer Ergebnisse in Bezug auf Realsituationen und das Überprüfen von Ergebnissen im Hinblick auf Stimmigkeit und Angemessenheit bezogen auf die Realsituation (vgl. KMK 2012; Tab. 7).

### 8.1.4 K4: Mathematische Darstellungen verwenden

Diese Kategorie berücksichtigt die Festlegung der Bildungsstandards (KMK 2012), wonach das Erzeugen und Umgehen von Diagrammen, Graphen, Tabellen und Formeln gemeint ist, darunter fassen wir auch den Wechsel von Graph zu Term (Tab. 8).

### 8.1.5 K5: Technisches Arbeiten

Diese Kategorie wird kodiert, wenn technisches, händisches Arbeiten als Abarbeiten von Prozeduren (Rechnungen, Zeichnungen) notwendig ist. Allgemein geht es

**Tab. 5** K1: Mathematisch Argumentieren

| Kode | Kode-Name | Detaillierte Beschreibung/Erklärung | Ankerbeispiel |
|---|---|---|---|
| 0 | Nicht benötigt | Es ist nicht notwendig, eine logische Abfolge mathematischer Argumente zu liefern (z. B. technische Aufgaben. Z. B. beschreibende) | Geben Sie die Nullstellen von f an |
| 1 | Standardbegründungen | Argumentationen durchführen, für die Alltagswissen genügt oder – hier nicht direkt naheliegende – bekannte Sätze, Verfahren, Herleitungen genutzt werden; z. B. einschrittige oder rein rechnerische Argumente entwickeln<br>Die alleinige Wiedergabe und Anwendung von Standardberechnungen zur Argumentation (z. B. Zeige, dass ein Extrempunkt vorliegt) erfüllt dies nicht | Zeigen Sie rechnerisch, dass der Graph von *f* im ersten Quadranten einen Wendepunkt hat.<br>(wegen der rechnerischen Argumentation, dass der Wendepunkt im ersten Quadranten liegt) |
| 2 | Mehrschrittige Argumentation | Überschaubare mehrschrittige, auch begrifflich geprägte mathematische Argumente entwickeln oder gegebenenfalls solche nachvollziehen bzw. erläutern | Begründen Sie ohne zu rechnen, dass es eine positive Zahl a gibt, für die $\int_0^a f(x)dx = 0$ ist.<br>Begründen Sie, warum es keinen Wert von x geben kann, für den f (x) größer ist als g (x) |
| 3 | Komplexe Argumentation | Komplexe mathematische Argumente (Begründungen, Beweise, Strategien, Verallgemeinerungen) entwickeln, nutzen oder solche nachvollziehen bzw. erläutern; verschiedene Arten von mathematischen Argumentationen oder deren Effizienz vergleichen oder bewerten (Kriterien z. B. Reichweite oder Schlüssigkeit) | Betrachtet wird der Inhalt der Fläche, die $G_{10}$ mit der x-Achse und der Gerade mit der Gleichung $x = -1$ einschließt. Begründen Sie, dass dieser Inhalt geringfügig größer ist als der Wert des Terms $\left|\int_{-1}^{0} f_{10} dx\right|$, ohne den Inhalt zu berechnen |

**Tab. 6** K2: Probleme mathematisch lösen

| Kode | Kode-Name | Detaillierte Beschreibung/Erklärung | Ankerbeispiel |
|---|---|---|---|
| 0 | Nicht benötigt | Bei der Stufe „0“ sind zwei Ausprägungen möglich:<br>(a) Es handelt sich um eine außermathematische Aufgabe. Hierbei wird nach dem Übersetzen in die Mathematik nur noch Basiswissen benötigt (bloßes Faktenwissen oder einfache Fertigkeiten/Arbeitstechniken).<br>(b) Es handelt sich um eine technische Aufgabe, bei der der abzuarbeitende Ansatz bereits in der Aufgabe vorgegeben ist oder direkt aus dem „Wissensrepertoire“ abgerufen werden kann | Zu (b):<br>Begründen Sie ohne zu rechnen, dass es eine positive Zahl a gibt, für die $\int_0^a f(x)dx = 0$ gilt. (Mit zusätzlicher Abbildung vom Graphen) |
| 1 | Standardproblem | Der Lösungsansatz ist nicht unmittelbar aus dem „Wissensrepertoire“ abrufbar. Er wird jedoch durch die Aufgabenstellung nahegelegt und benötigt zur vollständigen Entwicklung nur die Kenntnis des in der Aufgabe betrachteten mathematischen Gegenstandes. Es ist nur ein Schritt zur Lösung nötig. Die Hürde kann hier darin bestehen, zwei Standardverfahren zu verknüpfen | Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion von $f$, deren Graph einen Tiefpunkt im Koordinatenursprung hat<br>Bestimmen Sie rechnerisch denjenigen Wert von $b$, für den der Graph von $g_b$ und der Graph von $f$ eine Figur bilden, die bezüglich der $x$-Achse symmetrisch ist |
| 2 | Mehrschrittiges Problem | Für den Lösungsansatz sind zuerst Verbindungen herzustellen, die über den in der Aufgabe angesprochenen Gegenstand hinausgehen. Der Lösungsansatz ist ebenfalls nicht unmittelbar aus dem „Wissensrepertoire“ abrufbar. Zur Entwicklung werden Kenntnisse aus anderen mathematischen (Teil-)Gebieten benötigt, das heißt, es müssen verschiedene mathematische Gegenstände betrachtet werden oder mehrere Schritte ausgeführt werden. Das Vorgehen ist als mehrschrittig oder strategiegestützt zu beschreiben | Es gibt zwei Tangenten an den Graphen von $f$, deren Steigung $\frac{3e}{10}$ ist. Berechnen Sie für eine dieser Tangenten die $y$-Koordinate des Schnittpunkts mit der $y$-Achse sowie die Größe des Winkels, unter dem sie die $y$-Achse schneidet |
| 3 | Problemreflexion, -validierung oder -eigenentwicklung | Zur Lösung der Aufgabe ist es notwendig, eine umfassende Strategie (Kombination aus verschiedenen Heurismen) zu entwerfen und umzusetzen, oder über eine ganze Klasse von mathematischen Gegenständen nachzudenken. Die Aufgabe erfordert es, allgemeine Aussagen zu treffen oder über den Lösungsweg kritisch zu reflektieren (metakognitive Aktivitäten) | (Existiert in den kodierten Aufgaben nicht) |

**Tab. 7** K3: Mathematisch Modellieren

| Kode | Kode-Name | Detaillierte Beschreibung/Erklärung | Ankerbeispiel |
|---|---|---|---|
| 0 | Nicht benötigt | Innermathematische oder eingekleidete Aufgabe<br>Selbst bei Vorliegen einer Einkleidung liegt kein Modellierungsschritt vor, wenn dieser in der Aufgabenstellung schon expliziert formuliert ist (im Beispiel kursiv).<br>Wenn zwar ein Kontext vorhanden ist, aber die Aufgabe komplett ohne Kontext lösbar ist, wird ebenfalls Kode 0 vergeben | Bestimmen Sie den *dunkelgrau markierten Teil* des Fischs, der sich im Wasser befindet |
| 1 | Standardmodellierung | Übersetzungen, die unmittelbar ausgeführt werden können, da das Modell explizit gegeben ist oder unmittelbar nahe liegt und die Interpretation direkt möglich ist. Alternativ ist auch die Übertragung eines mathematischen Resultats auf eine gegebene Realsituation möglich | Berechnen Sie die Ausdehnung des Fischs in x-Richtung und in y-Richtung |
| 2 | Mehrschrittige Modellierung | Überschaubare Übersetzungen, die nicht unmittelbar ausführbar sind (z. B. müssen verschiedene Gegenstände miteinander in Beziehung gesetzt oder beim Mathematisieren mehrere Schritte durchgeführt werden). Das Anpassen eines mathematischen Modells an veränderte Umstände ist hier auch möglich | Am höchsten Punkt des Hangs steht ein Turm mit einer Höhe von 25 m. Es gibt zwei Abschnitte des Hangs, in denen der Turm vom Boden aus zumindest teilweise sichtbar ist. Ermitteln Sie die Lage des höher gelegenen der beiden Abschnitte |
| 3 | Modellreflexion, -validierung oder -eigenentwicklung | Verwendete mathematische Modelle (wie Formeln, Gleichungen, Darstellungen von Zuordnungen, Zeichnungen, Ablaufpläne) müssen verglichen, reflektiert, kritisch beurteilt werden.<br>Modell-Ergebnisse sollen validiert werden.<br>Komplexe mathematische Modelle müssen entwickelt oder eine komplexe Realsituation muss modelliert werden<br>Diese Kategorie wird nicht erreicht durch Addition mehrerer Modellierungsschritte – sondern hier muss bewusst die Reflexion, Validierung und Eigenentwicklung des Modells dabei sein | (existiert in den kodierten Aufgaben nicht) |

**Tab. 8** K4: Mathematische Darstellungen verwenden

| Kode | Kode-Name | Detaillierte Beschreibung/Erklärung | Ankerbeispiel |
|---|---|---|---|
| 0 | Nicht benötigt | Ein Darstellungswechsel wird nicht explizit gefordert, auch wenn dieser vielleicht hilfreich wäre | Es gibt zwei Tangenten an den Graphen von f, deren Steigung $\frac{3e}{10}$ ist. Berechnen Sie für eine dieser Tangenten die y-Koordinate des Schnittpunkts mit der y-Achse |
| | | Oder beim Darstellungswechsel handelt es sich um deklaratives Wissen und er gehört selbstverständlich zum verwendeten Begriff (dies kann beispielsweise beim Wechsel von Term zu Graph auftreten) | Berechnen Sie den Wert des Terms F(3) – F(0) |
| 1 | Standard-darstellungen | Informationen müssen aus gegebenen Darstellungen (Tabelle, Graph oder Diagramm) entnommen werden. Oder Standarddarstellungen müssen mittels gegebener Informationen angefertigt oder fortgesetzt werden.<br>Z. B.:<br>– wenn ein Darstellungswechsel explizit gefordert ist, auch wenn er nicht unbedingt nötig ist<br>– wenn man mit z. B. der Grafik arbeiten muss<br>– wenn Nutzen einer weiteren Darstellung sinnvoll für einen Ansatz ist, auch wenn das nicht unbedingt nötig ist<br>– wenn die Vorstellung eines Darstellungswechsels notwendig ist | Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen von f für $x \to -\infty$ und für $x \to +\infty$<br>Für jeden Wert von b hat der Tiefpunkt des Graphen von $g_b$und $g_b{}'$ einen gemeinsamen Punkt. Berechnen Sie die Koordinaten dieses Punkts. (Abbildung der Graphen $g_2$, $g_3$ und $g_4$) |
| 2 | Zusammenhänge/ Wechsel zwischen Darstellungen | Darstellungsformen müssen je nach Situation und Zweck ausgewählt werden. Oder es muss zwischen verschiedenen Darstellungen gewechselt werden (Übersetzen). Oder Zusammenhänge zwischen gegebenen Darstellungen müssen hergestellt werden. Oder gegebene Darstellungen müssen verändert werden.<br>Das wechselseitige Arbeiten mit der Darstellung oder Zusammenhänge zwischen Term und Visualisierung sind erforderlich | Begründen Sie ohne zu rechnen, dass es eine positive Zahl a gibt, für die $\int_0^a f(x)dx = \mathbf{0}$ gilt |
| 3 | Beurteilen von Darstellungen | Gegebene Darstellungen müssen beurteilt und reflektiert werden. Es muss mit unvertrauten Darstellungen und Darstellungsformen sachgerecht und verständig umgegangen werden. Oder eigene Darstellungen müssen problemadäquat entwickelt werden | (Existiert in den kodierten Aufgaben nicht) |

hier um das Ausführen von Operationen mit mathematischen Objekten wie Zahlen, Größen, Variablen, Termen, Gleichungen und Funktionen sowie Vektoren und geometrischen Objekten (Tab. 9).

#### *8.1.6 K6: Mathematisch Kommunizieren*

Diese Kategorie enthält das Darlegen von Überlegungen und Resultaten unter Verwendung einer angemessenen Fachsprache. Aufgrund der zum Teil langen Stimulustexte, die nicht eindeutig zu einer Teilaufgabe zuzordnen sind, wird das Entnehmen von Informationen aus schriftlichen Texten, aus mathematischen Ausdrücken und Resultaten nicht kodiert (Tab. 10).

#### *8.1.7 G: Grundvorstellungen*

In dieser Kategorie beziehen wir uns auf die Grundvorstellungen der Analysis in der Sekundarstufe II, also zur Integralrechnung (Flächeninhalt, Rekonstruktion, Mittelwert, Kumulation), zur Differentialrechnung (Lokale Änderungsrate, Tangentensteigung, Lokale Linearität, Verstärkungsfaktor) sowie zum Grenzwert (Annäherung, Umgebung, Objekt) (vgl. Greefrath et al. 2016). Konkret wird nur kodiert, wenn diese Grundvorstellung(en) explizit zur Aufgabenlösung notwendig sind. Grundvorstellungen können sowohl in inner- als auch außermathematischen Aufgaben benötigt werden (Tab. 11).

#### *8.1.8 M: Rolle des Mediums*

Diese Kategorie wird entsprechend der Funktionalitäten unterteilt in CAS (symbolisches Lösen von Gleichungen, symbolisches Differenzieren) und Plot (Darstellen von Graphen). Die DGS-, Tabellenkalkulations- und Stochastik-Funktionalitäten eines CAS-Geräts werden aufgrund der Fokussierung des Projekts auf Analysis-Aufgaben nicht berücksichtigt.

#### *8.1.9 M1: Rolle des Mediums: CAS*

(Tab. 12)

#### *8.1.10 M2: Rolle des Mediums: Plot*

(Tab. 13)

**Tab. 9** K5: Technisches Arbeiten

| Kode | Kode-Name | Detaillierte Beschreibung/Erklärung | Ankerbeispiel |
|---|---|---|---|
| 0 | Nicht benötigt | Das Ausführen von Prozeduren ist nicht erforderlich | Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen von f für $x \to -\infty$ und für $x \to +\infty$ |
| 1 | Einfaches Verfahren aus der SI | Formeln und Symbole müssen direkt angewendet werden. Dabei geht es um Verfahren aus der Sekundarstufe I | Geben Sie die Nullstellen von f an |
| 2 | Einfaches Verfahren aus der SII | Formeln und Symbole müssen direkt angewendet werden. Dabei geht es um Verfahren aus der Sekundarstufe II<br>Dies wird auch dann kodiert, wenn nur ein Aspekt aus der SII dazu kommt und das Verfahren als solches in der SI behandelt wird | Zeigen Sie rechnerisch, dass der Graph von f im ersten Quadranten einen Wendepunkt hat |
| 3 | Komplexe Verfahren | Kombination von Verfahren reflektieren<br>Eine Aufgabe führt nur zu Kode 3, wenn es explizit gefordert wird | Es gibt zwei Tangenten an den Graphen von f, deren Steigung $\frac{3e}{10}$ ist. Berechnen Sie für eine dieser Tangenten die y-Koordinate des Schnittpunkts mit der y-Achse |

**Tab. 10** K6: Mathematisch Kommunizieren

| Kode | Kode-Name | Detaillierte Beschreibung/Erklärung | Ankerbeispiel |
|---|---|---|---|
| 0 | Nicht benötigt | Wenn nur ein Wort oder Wert angegeben werden muss, ist dies kein anzufertigender Text | Geben Sie die Nullstellen // das Maximum bzw. Minimum von f an |
| 1 | Einfache Texte erstellen | Es müssen einfache, mathematische Sachverhalte dargelegt werden | Begründen Sie, dass der Inhalt des Flächenstücks, das $G_f$ im ersten Quadranten mit t und der y-Achse einschließt, kleiner als $\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{27}{8}$ ist |
| 2 | Texterstellung mit Umorganisation | Mehrschrittige textliche Überlegungen gehören zu der Aufgabe und deren Ergebnisse müssen verständlich dargelegt werden | Begründen Sie ohne zu rechnen, dass es eine positive Zahl a gibt, für die $\int_0^a f(x)dx = \mathbf{0}$ gilt |
| 3 | Erstellen logisch komplexer Texte | Ein komplexer mathematischer Text, der den Sachverhalt kohärent und vollständig darlegt, muss erstellt werden | (existiert in den kodierten Aufgaben nicht) |

**Tab. 11** G: Grundvorstellungen

| Kode | Kode-Name | Detaillierte Beschreibung/Erklärung | Ankerbeispiel |
|---|---|---|---|
| 0 | Nicht benötigt | Bei der Bearbeitung der Aufgabe werden keine Grundvorstellungen benötigt, d. h. automatisierte Handlungen müssen ausgeführt werden (etwa Ablesen oder Vergleichen).<br>Es wird kein inhaltliches Denken angeregt.<br>Die Aufgabe erfordert kein bewusstes Explizieren einer Vorstellung.<br>Wenn man direkt ein Verfahren ansetzen kann, stehen Vorstellungen nicht im Vordergrund | Geben Sie die Nullstellen von f an |
| 1 | Eine Grundvorstellung | Bei der Bearbeitung der Aufgabe wird eine Grundvorstellung benötigt oder die offensichtliche Kombination aus verwandten Grundvorstellungen ist nötig.<br>Es wird inhaltliches Denken angeregt.<br>Die Aufgabe erfordert ein bewusstes Explizieren einer Vorstellung | Eine der Tangenten an den Graphen von f verläuft durch den Punkt $(0\|0{,}5)$. Zeichnen Sie diese Tangente in die Abbildung ein |
| 2 | Nicht-triviale Kombination von zwei Grundvorstellungen | Bei der Bearbeitung der Aufgabe werden zwei Grundvorstellungen benötigt | Begründen Sie ohne zu rechnen, dass es eine positive Zahl a gibt, für die $\int_0^a f(x)dx = 0$ gilt |
| 3 | Mehr als 2 Grundvorstellungen | Bei der Bearbeitung der Aufgabe werden mehr als zwei Grundvorstellungen benötigt | (existiert in den kodierten Aufgaben nicht) |

**Tab. 12** M1: Rolle des Mediums: CAS

| Kode | Kode-Name | Detaillierte Beschreibung/Erklärung | Ankerbeispiel |
|---|---|---|---|
| 0 | Nicht verfügbar | Die Funktionalität ist bei dem gegebenen Hilfsmittel nicht verfügbar | (Bei allen WTR-Aufgaben) |
| 1 | Unterdrückt | Die Frage ist bewusst so strukturiert (bzw. operationalisiert), dass die Funktionalität nicht direkt zu ihrer Lösung verwendet werden kann. In einer alternativen Formulierung könnte die Funktionalität einen wesentlichen Beitrag zur Lösung der Fragestellung leisten. Es ist außerdem möglich, dass sie indirekt zur Unterstützung herangezogen werden kann | Zeigen Sie rechnerisch, dass der Graph von $f$ im ersten Quadranten einen Wendepunkt hat.<br>(Hier lässt sich ein CAS z. B. indirekt einsetzen, um einzelne manuelle Rechenschritte zu kontrollieren.) |
| 2 | Neutral | Die Funktionalität hat bereits unabhängig von der konkreten Operationalisierung der Aufgabenstellung kein Potenzial, zur Lösung der Frage beizutragen | Deuten Sie das Integral ... geometrisch |
| 3 | Optional | Die Funktionalität kann zur Lösung der Frage beitragen, aber ihr Einsatz ist nicht zwingend erforderlich. Es gibt weitere Möglichkeiten die Aufgabe zu lösen. Diese können hinsichtlich des Aufwands und der Schwierigkeit gleichwertig, aufwändiger oder weniger aufwendig sein | Bestimmen Sie $a$ so, dass $\int_0^a f(x)dx = 10$ gilt<br><br>Bestimmen Sie alle Stellen, an denen der Graph der Funktion $f(x) = 2x^3 + 2x + 1$ die Steigung 2 hat |
| 4 | Notwendig | Die Aufgabe kann ohne den Einsatz der Funktionalität nicht angemessen durch einen Lernenden auf erwartbarem Fähigkeitsniveau gelöst werden | Für jeden Wert von b schließen die Graphen von $g_b$ und $g_{b+1}$ im vierten Quadranten mit der x-Achse ein Flächenstück ein. Bestimmen Sie denjenigen Wert von b, für den der Inhalt des Flächenstücks $\frac{1}{10} \cdot \left(e^3 + 1\right)$ beträgt |

**Tab. 13** M2: Rolle des Mediums: Plot

| Kode | Kode-Name | Detaillierte Beschreibung/Erklärung | Ankerbeispiel |
|---|---|---|---|
| 0 | Nicht verfügbar | Die Funktionalität ist bei dem gegebenen Hilfsmittel nicht verfügbar | (Bei allen WTR-Aufgaben) |
| 1 | Unterdrückt | Die Frage ist bewusst so strukturiert (bzw. operationalisiert), dass die Funktionalität nicht direkt zu ihrer Lösung verwendet werden kann. In einer alternativen Formulierung könnte die Funktionalität einen wesentlichen Beitrag zur Lösung der Fragestellung leisten. Es ist außerdem möglich, dass sie indirekt zur Unterstützung herangezogen werden kann | Zeigen Sie rechnerisch, dass der Graph von *f* im ersten Quadranten einen Wendepunkt hat. Hier lässt sich ein Plot nutzen, um die berechnete Lösung zu kontrollieren |
| 2 | Neutral | Die Funktionalität hat bereits unabhängig von der konkreten Operationalisierung der Aufgabenstellung kein Potenzial, zur Lösung der Frage beizutragen | Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion $f'(x)$ von $f(x) = \ldots$ |
| 3 | Optional | Die Funktionalität kann zur Lösung der Frage beitragen, aber ihr Einsatz ist nicht zwingend erforderlich. Es gibt weitere Möglichkeiten die Aufgabe zu lösen. Diese können hinsichtlich des Aufwands und der Schwierigkeit gleichwertig, aufwändiger oder weniger aufwendig sein | Nennen Sie die Anzahl der lokalen Extremstellen der Funktion f<br>Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen von f für $x \to \infty$ |
| 4 | Notwendig | Die Aufgabe kann ohne den Einsatz der Funktionalität nicht angemessen durch einen Lernenden auf erwartbarem Fähigkeitsniveau gelöst werden | Skizzieren Sie den Graphen von $g_b$ [für ein bestimmtes b, mit $g_b(x) = \frac{1}{10}x \cdot (x-b) \cdot e^x$] |

**Funding** Open Access funding enabled and organized by Projekt DEAL.



## Literatur

Anderson, L. W., & Krathwohl, D. R. (Hrsg.). (2001). *A taxonomy for learning, teaching, and assessing: a revision of bloom's taxonomy of educational objectives*. Longman.

Barzel, B. (2012). *Computeralgebra im Mathematikunterricht: Ein Mehrwert – aber wann?* Waxmann.

Barzel, B., & Greefrath, G. (2015). Digitale Mathematikwerkzeuge sinnvoll integrieren. In W. Blum, S. Vogel, C. Drüke-Noe & A. Roppelt (Hrsg.), *Bildungsstandards aktuell: Mathematik in der Sekundarstufe II* (S. 145–157). Westermann Schroedel Diesterweg Schöningh Winklers.

Barzel, B., & Klinger, M. (2022). Digitale Mathematikwerkzeuge. In G. Pinkernell, F. Reinhold, F. Schacht & D. Walter (Hrsg.), *Digitales Lehren und Lernen von Mathematik in der Schule* (S. 91–108). Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-662-65281-7_5.

Barzel, B., & Leuders, T. (2021). „Learning to the Test?" – Wissen, was man lernt: Wie Lernen und Prüfen zusammengeht. *mathematik lehren*, *225*, 2–7.

Bauer, K., & Tschacher, K. (2006). Mathematisches Repetitorium und CAS. In Fachgruppe Computeralgebra der DMV, GAMM und GI (Hrsg.), *Computeralgebra in Lehre, Ausbildung und Weiterbildung V „Entdecken, Üben, Prüfen mit Computeralgebra – Neue Entwicklungen an Schule und Hochschule"* (S. 11–20).

Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A., Klusmann, U., Krauss, S., Neubrand, M., & Tsai, Y.-M. (2010). Teachers' mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom, and student progress. *American Educational Research Journal*, *47*(1), 133–180. https://doi.org/10.3102/0002831209345157.

Beck, J. (2020). Der Vergleich bayrischer CAS- und Nicht-CAS-Abituraufgaben. In A. Frank, S. Krauss & K. Binder (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2019* (S. 97–100). WTM. https://doi.org/10.17877/DE290R-20663.

Biggs, J. (1996). Enhancing teaching through constructive alignment. *Higher Education*, *32*(3), 347–364. https://doi.org/10.1007/BF00138871.

Blum, W., Neubrand, M., Ehmke, T., Senkbeil, M., Jordan, A., Ulfig, F., & Carstensen, C. (2004a). Mathematische Kompetenz. In Deutsches PISA-Konsortium, M. Prenzel, J. Baumert, W. Blum, R. Lehmann, D. Leutner, M. Neubrand, R. Pekrun, H.-G. Rolff, J. Rost & U. Schiefele (Hrsg.), *PISA 2003. Der Bildungsstand der Jugendlichen in Deutschland – Ergebnisse des zweiten internationalen Vergleichs* (S. 47–92). Waxmann.

Blum, W., vom Hofe, R., Jordan, A., & Kleine, M. (2004b). Grundvorstellungen als aufgabenanalytisches und diagnostisches Instrument bei PISA. In M. Neubrand (Hrsg.), *Mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in Deutschland: Vertiefende Analysen im Rahmen von PISA 2000* (S. 145–173). VS.

Blum, W., Drüke-Noe, C., Leiß, D., Wiegand, B., & Jordan, A. (2005). Zur Rolle von Bildungsstandards für die Qualitätsentwicklung im Mathematikunterricht. *ZDM – Mathematics Education*, *37*(4), 267–274. https://doi.org/10.1007/BF02655814.

Bortz, J., & Schuster, C. (2010). *Statistik für Human- und Sozialwissenschaftler*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-12770-0.

Brown, R. (2001). The transition from scientific calculators to computer algebra systems in one educational system. In W.-C. Yang, S.-C. Chu, Z. Karian & G. Fitz-Gerald (Hrsg.), *Sixth Asian technology conference in mathematics* (S. 311–320). ATCM.

Brown, R. (2003). Computer algebra systems and mathematics examinations: a comparative study. *The International journal of computer algebra in mathematics education*, *10*(3), 155–182.

Brown, R. (2009). The use of the graphing calculator in high stakes examinations: trends in extended response questions over time. In C. Winsløw (Hrsg.), *Nordic research in mathematics education* (S. 253–260). Sense. https://doi.org/10.1163/9789087907839_039.

Brown, R. (2010). Does the introduction of the graphics calculator into system-wide examinations lead to change in the types of mathematical skills tested? *Educational Studies in Mathematics*, *73*(2), 181–203. https://doi.org/10.1007/s10649-009-9220-2.

Bruder, R. (2021). Comparison of the Abitur examination in mathematics in Germany before and after reunification in 1990. *ZDM – Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01289-4.

Burrill, G., Allison, J., Breaux, G., Kastberg, S., Leatham, K., & Sanchez, W. (2002). *Handheld graphing technology in secondary mathematics: research findings and implications for classroom practice*. Michigan State University. Texas Instruments, Hrsg.

Drijvers, P., Ball, L., Barzel, B., Heid, M.K., Cao, Y., & Maschietto, M. (2016). *Uses of technology in lower secondary mathematics education: a concise topical survey*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-33666-4.

Drüke-Noe, C. (2014). *Aufgabenkultur in Klassenarbeiten im Fach Mathematik*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-658-05351-2.

Ellington, A.J. (2006). The effects of non-CAS graphing calculators on student achievement and attitude levels in mathematics: a meta-analysis. *School Science and Mathematics*, *106*(1), 16–26. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2006.tb18067.x.

Fauth, B., & Leuders, T. (2022). *Kognitive Aktivierung im Unterricht* (2. Aufl.). Bd. 2. Institut für Bildungsanalysen Baden-Württemberg.

Greefrath, G., Leuders, T., & Pallack, A. (2008). Gute Abituraufgaben – (Ob) mit oder ohne Neue Medien. *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht*, *61*(2), 79–83.

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V., & Weigand, H.-G. (2016). Aspects and "Grundvorstellungen" of the concepts of derivative and integral: Subject matter-related didactical perspectives of concept formation. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *37*(S1), 99–129. https://doi.org/10.1007/s13138-016-0100-x.

Greefrath, G., Siller, H.-S., & Ludwig, M. (2017). Modelling problems in German grammar school leaving examinations (Abitur) – Theory and practice. In T. Dooley & G. Gueudet (Hrsg.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (S. 932–939). Institute of Education and ERME. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01933483.

Hanna, G. (1995). Challenges to the importance of proof. *For the Learning of Mathematics*, *15*(3), 42–49.

Heintz, G., Drüke-Noe, C., & Greefrath, G. (2015). Abituraufgaben im Sinne der Bildungsstandards. In W. Blum, S. Vogel, C. Drüke-Noe & A. Roppelt (Hrsg.), *Bildungsstandards aktuell: Mathematik in der Sekundarstufe II* (S. 171–180). Westermann Schroedel Diesterweg Schöningh Winklers.

Hillmayr, D., Ziernwald, L., Reinhold, F., Hofer, S.I., & Reiss, K.M. (2020). The potential of digital tools to enhance mathematics and science learning in secondary schools: a context-specific meta-analysis. *Computers & Education*, *153*, 103897. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2020.103897.

Hofbauer, L. (2021). *Umsetzung der KMK Bildungsstandards in Abituraufgaben im Fach Mathematik – Ein Vergleich der Länder Bayern und Berlin*. Freie Universität Berlin. https://doi.org/10.17169/refubium-30720. Masterarbeit

Hoffmann, L., Schröter, P., & Stanat, P. (2022). Jüngere Entwicklungen bei Abitur und Abiturprüfungen in Deutschland. In L. Hoffmann, P. Schröter, A. Groß, S.M. Schmid-Kühn & P. Stanat (Hrsg.), *Das unvergleichliche Abitur* (S. 39–60). wbv Media. https://doi.org/10.3278/9783763972494.

Holmeier, M. (2013). *Leistungsbeurteilung im Zentralabitur*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-531-19725-8.

Hoyles, C., & Lagrange, J.-B. (Hrsg.). (2010). *Mathematics education and technology-rethinking the terrain: the 17th ICMI study*. Bd. 13. Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0146-0.

Jahnke, T., Klein, H.P., Kühnel, W., Sonar, T., & Spindler, M. (2014). Die Hamburger Abituraufgaben im Fach Mathematik. Entwicklung von 2005 bis 2013. *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, *22*(2), 115–122. https://doi.org/10.1515/dmvm-2014-0046.

Jordan, A., Ross, N., Krauss, S., Baumert, J., Blum, W., Neubrand, M., Löwen, K., Brunner, M., & Kunter, M. (2006). *Klassifikationsschema für Mathematikaufgaben: Dokumentation der Aufgabenkategorisierung im COACTIV-Projekt*. Max-Planck-Inst. für Bildungsforschung.

Jordan, A., Krauss, S., Löwen, K., Blum, W., Neubrand, M., Brunner, M., Kunter, M., & Baumert, J. (2008). Aufgaben im COACTIV-Projekt: Zeugnisse des kognitiven Aktivierungspotentials im deutschen Mathematikunterricht. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *29*(2), 83–107. https://doi.org/10.1007/BF03339055.

Kadijevich, D. (2005). Towards baisc standards for research in mathematics education. *The Teaching of Mathematics*, *8*(2), 73–81.

Kahnert, J. (2014). *Das Zentralabitur im Fach Mathematik. Eine empirische Analyse von Abitur- und TIMSS-Daten im Vergleich*. Waxmann.

Kaiser, G., & Schwarz, B. (2010). Authentic modelling problems in mathematics education—Examples and experiences. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *31*(1), 51–76. https://doi.org/10.1007/s13138-010-0001-3.

Kieran, C., & Drijvers, P. (2006). The co-emergence of machine techniques, paper-and-pencil techniques, and theoretical reflection: a study of cas use in secondary school algebra. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *11*(2), 205–263. https://doi.org/10.1007/s10758-006-0006-7.

Klein, E., Kühn, S.M., Van Ackeren, I., & Block, R. (2009). Wie zentral sind zentrale Prüfungen? Abschlussprüfungen am Ende der Sekundarstufe II im nationalen und internationalen Vergleich. *Zeitschrift für Padagogik*, *55*(4), 596–621.

Klieme, E. (2018). Unterrichtsqualität. In M. Harring, C. Rohlfs & M. Gläser-Zikuda (Hrsg.), *Handbuch Schulpädagogik* (S. 393–408). Waxmann.

KMK (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012)*. Wolters Kluwer.

KMK (Hrsg.). (2016). *Gesamtstrategie der Kultusministerkonferenz zum Bildungsmonitoring*. Wolters Kluwer.

KMK (Hrsg.). (2022). *Bildungsstandards für das Fach Mathematik. Erster Schulabschluss (ESA) und Mittlerer Schulabschluss (MSA) (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 15.10.2004 und vom 04.12.2003, i.d.F. vom 23.06.2022)*. Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland. https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2022/2022_06_23-Bista-ESA-MSA-Mathe.pdf

Kühn, S.M. (2010). *Steuerung und Innovation durch Abschlussprüfungen?* Springer VS. https://doi.org/10.1007/978-3-531-92418-2.

Kühn, S.M., & Drüke-Noe, C. (2013). Qualität und Vergleichbarkeit durch Bildungsstandards und zentrale Prüfungen? Ein bundesweiter Vergleich von Prüfungsanforderungen im Fach Mathematik zum Erwerb des Mittleren Schulabschlusses. *Zeitschrift für Pädagogik*, *59*(6), 912–932.

Kühnel, W. (2015). Modellierungskompetenz und Problemlösekompetenz im Hamburger Zentralabitur zur Mathematik. *Mathematische Semesterberichte*, *62*(1), 69–82. https://doi.org/10.1007/s00591-015-0145-9.

Kunter, M., & Baumert, J. (2006). Linking TIMSS to research on learning and instruction: a re-analysis of the German TIMSS and TIMSS video data. In S.J. Howie & T. Plomp (Hrsg.), *Contexts of learning mathematics and science* (S. 335–352). Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203012536.

Kunter, M., & Voss, T. (2011). Das Modell der Unterrichtsqualität in COACTIV: Eine multikriteriale Analyse. In M. Kunter, J. Baumert & W. Blum (Hrsg.), *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften: Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV* (S. 85–113). Waxmann.

Landis, J.R., & Koch, G.G. (1977). The measurement of observer agreement for categorical data. *Biometrics*, *33*(1), 159. https://doi.org/10.2307/2529310.

Leuders, T., & Holzäpfel, L. (2011). Kognitive Aktivierung im Mathematikunterricht. *Unterrichtswissenschaft*, *39*(3), 213–230.

Lipowsky, F., Drollinger-Vetter, B., Klieme, E., Pauli, C., & Reusser, K. (2018). Generische und fachdidaktische Dimensionen von Unterrichtsqualität – zwei Seiten einer Medaille? In M. Martens, K. Rabenstein, K. Bräu, M. Fetzer, H. Gresch, I. Hardy & C. Schelle (Hrsg.), *Konstruktionen von Fachlichkeit: Ansätze, Erträge und Diskussionen in der empirischen Unterrichtsforschung* (S. 183–202). Julius Klinkhardt.

Lorenz, R., Kahnert, J., Eickelmann, B., & Walzebug, A. (2014). Schwierigkeitsmerkmale von Mathematikaufgaben im Zentralabitur aus fachlicher und sprachlicher Perspektive – Experteneinschätzungen und statistische Befunde im Vergleich. In K. Drossel, R. Strietholt & W. Bos (Hrsg.), *Empirische Bildungsforschung und evidenzbasierte Reformen im Bildungswesen*. Fachportal Pädagogik. (S. 229–250). Waxmann.

Maier, U., Kleinknecht, M., Metz, K., & Bohl, T. (2010). Ein allgemeindidaktisches Kategoriensystem zur Analyse des kognitiven Potenzials von Aufgaben. *Beiträge zur Lehrerbildung*, *28*(1), 84–96. https://doi.org/10.25656/01:13734.

Neubrand, M., Jordan, A., Krauss, S., Blum, W., & Löwen, K. (2013). Task analysis in COACTIV: examining the potential for cognitive activation in German mathematics classrooms. In M. Kunter, J. Baumert, W. Blum, U. Klusmann, S. Krauss & M. Neubrand (Hrsg.), *Cognitive activation in the mathematics classroom and professional competence of teachers. Results from the COACTIV project* (S. 125–144). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-5149-5_7.

Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics. The Danish KOM project. In A. Gagatsis & S. Papastavridis (Hrsg.), *3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education* (S. 115–124). Hellenic Mathematical Society.

Niss, M., & Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational Studies in Mathematics*, *102*(1), 1. https://doi.org/10.1007/s10649-019-09903-9.

OECD (Hrsg.). (2003). *The PISA 2003 assessment framework—mathematics, reading, science and problem solving knowledge and skills*. OECD.

Prodromou, L. (1995). The backwash effect: from testing to teaching. *ELT Journal*, *49*(1), 13–25. https://doi.org/10.1093/elt/49.1.13.

Racherbäumer, K., & Kühn, S. M. (2013). Zentrale Prüfungen und individuelle Förderung: Gegensatz oder zwei Seiten derselben Medaille? *Zeitschrift für Bildungsforschung*, *3*(1), 27–45. https://doi.org/10.1007/s35834-013-0054-8.

Reusser, K., Lipowsky, F., & Pauli, C. (2021). Eine kognitiv aktivierende Lernumgebung gestalten. *Pädagogik*, *11*, 8–13. https://doi.org/10.3262/PAED2111008.

Rolfes, T., Lindmeier, A., & Heinze, A. (2020). Mathematikleistungen von Schülerinnen und Schülern der gymnasialen Oberstufe in Deutschland: Ein Review und eine Sekundäranalyse der Schulleistungsstudien seit 1995. *Journal für Mathematik-Didaktik*. https://doi.org/10.1007/s13138-020-00180-1.

Sabio, J., Balagtas, M., & David, D. (2015). "Backwash effects" of testing on learning mathematics. *The Normal Lights*, *9*(2), 156–179.

Salle, A., & Clüver, T. (2021). Herleitung von Grundvorstellungen als normative Leitlinien – Beschreibung eines theoriebasierten Verfahrensrahmens. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *42*(2), 553–580. https://doi.org/10.1007/s13138-021-00184-5.

Scheja, B. (2017). Kognitive Aktivierung durch Mathematikaufgaben zentraler Abschlussprüfungen. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *38*(2), 291–322. https://doi.org/10.1007/s13138-017-0119-7.

Schmidt-Thieme, B., & Weigand, H.-G. (2015). Medien. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 461–490). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-35119-8_17.

Siller, H.-S., & Greefrath, G. (2020). Modelling tasks in central examinations based on the example of Austria. In G. A. Stillman, G. Kaiser & C. E. Lampen (Hrsg.), *Mathematical modelling education and sense-making* (S. 383–392). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-37673-4_33.

Sjuts, J. (2007). Kompetenzdiagnostik im Lernprozess – auf theoriegeleitete Aufgabengestaltung und -auswertung kommt es an. *mathematica didactica*, *30*(2), 33–52. https://doi.org/10.18716/ojs/md/2007.1084.

Steinke, I. (2019). Gütekriterien Qualitativer Forschung. In U. Flick, E. von Kardorff & I. Steinke (Hrsg.), *Qualitative Forschung – Ein Handbuch* (13. Aufl. S. 319–331). Rowohlt.

Steinmetz, M. (2013). *Der überforderte Abiturient im Fach Deutsch*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-658-00425-5.

Sube, M., Camminady, T., Frank, M., & Roeckerath, C. (2020). Vorschlag für eine Abiturprüfungsaufgabe mit authentischem und relevantem Realitätsbezug. In G. Greefrath & K. Maaß (Hrsg.), *Modellierungskompetenzen – Diagnose und Bewertung* (S. 153–187). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-662-60815-9_8.

Turner, R., Dossey, J., Blum, W., & Niss, M. (2013). Using mathematical competencies to predict item difficulty in PISA: a MEG study. In M. Prenzel, M. Kobarg, K. Schöps & S. Rönnebeck (Hrsg.), *Research on PISA* (S. 23–37). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4458-5_2.

Vohns, A., Obereder, T., Egger, J., & Scheiber, S. (2019). *Textverständnis oder mathematisches Verständnis: Was macht Aufgaben der AHS-Zentralmatura Mathematik schwierig?* Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG), Bd. 52 (S. 93–112).

Vom Hofe, R., & Blum, W. (2016). "Grundvorstellungen" as a category of subject-matter didactics. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *37*(S1), 225–254. https://doi.org/10.1007/s13138-016-0107-3.

Weigand, H.-G. (2006). Der Einsatz eines Taschencomputers in der 10. Jahrgangsstufe Evaluation eines einjährigen Schulversuchs. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *27*(2), 89–112. https://doi.org/10.1007/BF03339031.

Weigand, H.-G., & Weth, T. (2010). *Computer im Mathematikunterricht: Neue Wege zu alten Zielen*. Spektrum.

Zbiek, R. M., Heid, M. K., Blume, G. W., & Dick, T. P. (2007). Research on technology in mathematics education: A perspective of constructs. In F. K. Lester (Hrsg.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (S. 1169–1207). Information Age.